О.В. Леонова, П.Г. Сорокина

ОСНОВЫ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА. КУРС ЛЕКЦИЙ

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

О.В. Леонова, П.Г. Сорокина

ОСНОВЫ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА. КУРС ЛЕКЦИЙ

Учебное пособие

Текстовое электронное издание

Иркутск
Издательский дом БГУ
2021

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7

Издается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Аксенюшкина
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. Мамонова

Леонова, О.В. Основы количественного анализа. Курс лекций : учеб. пособие / О.В. Леонова, П.Г. Сорокина. – Иркутск : Изд. дом БГУ, 2021. – [110 с.]. – URL: http://lib-catalog.bgu.ru. – Текст: электрон.

В учебном пособии содержится теоретический материал, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения. Излагаемый материал охватывает следующие разделы рабочей программы дисциплины «Основы количественного анализа»: основы финансовой математики, вероятностные методы в экономике.

Для студентов очной и заочной форм обучения (направление подготовки 38.03.02 Менеджмент, направленность (профиль) «Управление бизнесом. Управление бизнесом (Русско-китайская программа двойного дипломирования)»).

Учебное электронное издание

Минимальные системные требования:
веб-браузер Internet Explorer версии 6.0 и более поздние, Opera версии 7.0
и более поздние, Google Chrome 3.0 и более поздние.
Компьютер с доступом к сети Интернет.
Минимальные требования к конфигурации и операционной системе компьютера определяются требованиями перечисленных выше
программных продуктов.

Издается в авторской редакции

Подписано к использованию 15.10.2021.
Объем 2,7 Мб.

Байкальский государственный университет.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
http://bgu.ru.

Оглавление

Справочный материал

1.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк одинаковой длины и n столбцов одинаковой длины. Таблица, которая рассматривается как матрица, обычно заключается в круглые (или квадратные) скобки и обозначается заглавной латинской буквой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij} \right]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Матрицу A называют *матрицей размера* $m \times n$, используя при этом запись $A_{m\times n}$, где m – количество строк, n – количество столбцов в матрице. Числа a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, где i – номер строки, а j – номер столбца, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Понятие матрицы широко используется в повседневной жизни: расписание занятий, поездов и самолетов, телефонная книга, квитанция об оплате коммунальных услуг, список групп и т.д.

Пример 1. Даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Указать размерность матриц и найти значения элементов a_{22}, b_{23}, c_{32}. Размер матрицы A – $A_{2\times2}$, элемент $a_{22}=0$; матрица $B_{2\times3}$, $b_{23}=0$; матрица $C_{3\times3}$, $c_{32}=4$.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. $m=n$, называется *квадратной матрицей порядка (размерности)* n. В примере 1 матрицы A и C – квадратные матрицы порядка (размерности) 2 и 3 соответственно.

Рассмотрим операции над матрицами:

1. Равенство матриц.

Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеет одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.

2. Умножение матрицы на число.

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

3. Сложение (вычитание) матриц.

Сложением (вычитанием) матриц одинаковой размерности $A_{(m\times n)}$ и $B_{(m\times n)}$ называется матрица, которая получается сложением (вычитанием) соответствующих элементов слагаемых (вычитаемых) матриц:

Пример 2. Найти $A+B$, если $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & -2\end{bmatrix}$.

$$A+B=\begin{bmatrix}1+0 & 3+5\\ 1+6 & 7+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 7 & 5\end{bmatrix}.$$

Пример 3. Найти $A-B$, если $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & 2\end{bmatrix}$.

$$A-B=\begin{bmatrix}1-0 & 3-5\\ -1-6 & 7-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}.$$

4. Умножение матриц.

Произведением матриц A размерности $(m\times n)$ и B размерности $(n\times k)$ называется матрица AB размерности $(m\times k)$, полученная по правилу: а) количество столбцов матрицы A должно совпадать с количеством строк матрицы B; б) каждая строка матрицы A умножается поочередно на все столбцы матрицы B, как скалярное произведение векторов:

Пример 4. Даны матрицы: $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -3 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

Найти произведение этих матриц.

$$AB=\left[\begin{array}{cc}1 & 6\\ \hline -3 & 8\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c|c}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1\cdot 7+6\cdot 5 & 1\cdot 5+6\cdot 2 & 1\cdot 1+6\cdot 0\\ -3\cdot 7+8\cdot 5 & -3\cdot 5+8\cdot 2 & -3\cdot 1+8\cdot 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7+30 & 5+12 & 1+0\\ -21+40 & -15+16 & -3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 17 & 1\\ 19 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Свойства произведения матриц:

а) $A(BC)=(AB)C$;

б) $\lambda(AB)=(\lambda A)B$;

в) $(A+B)C=AB+AC$, $A(B+C)=AB+AC$;

г) в общем случае $AB\neq BA$;

д) $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k}$.

Квадратные матрицы A и B порядка n называются *перестановочными*, если $AB=BA$.

5. *Транспонирование матриц* – это замена строк матрицы ее столбцами с сохранением порядка.

В результате транспонирования матрицы $A(m \times n)$ получим транспонированную матрицу A^t $(n \times m)$.

Пример 5. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$. В результате транспонирования получим матрицу: $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$.

Свойства транспонирования:

а) $(A^t)^t = A$;

б) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, где α – число;

в) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

г) $(AB)^t = B^t A^t$.

1.1.1. Задачи по теме «Матрицы и операции над ними»

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Определить размерность заданных матриц. Найти значения элементов a_{12}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{31}, c_{13}, c_{31}, c_{33}.

2. Если $\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$. Найти a, b, c и d.

3. Если $\begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Найти a, b, c и d.

4. Найти матрицу $C = -5A + 2B$, если

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;   b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $C = A^T - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$. Если $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, найти x и y.

7. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$. Найти $B^T\cdot A^T\cdot A\cdot B$.

8. Найти произведение матриц:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix},\quad \text{d)}\ \begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

9. Решить систему матричных уравнений $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{cases}$

10. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислить: $a)$ A^3, $b)$ B^2, $c)$ $(A\cdot B)^3$.

11. Три предприятия выпускают четыре вида изделий. Задана матрица выпуска продукции:

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}1150 & 1250 & 1020 & 1384\\ 2030 & 3700 & 2700 & 1856\\ 1500 & 990 & 1058 & 720\end{pmatrix},$$

где a_{lk} $(l=1,2,3;\ k=1,2,3,4)$ – объем выпущенных изделий k-го вида на l-м предприятии с начала года на конец некоторого месяца. Найти месячный объем выпуска изделий на каждом предприятии, если аналогичная матрица через месяц имела вид

$$B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}2370 & 1980 & 1790 & 1880\\ 3500 & 4736 & 4015 & 2750\\ 2220 & 2112 & 2010 & 1830\end{pmatrix}.$$

12. Три типа транспортных самолетов распределены между четырьмя авиалиниями. Заданы матрицы объемов перевозок:

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}15 & 10 & 20 & 50\\ 20 & 25 & 10 & 17\\ 35 & 50 & 30 & 45\end{pmatrix} \text{ и } B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}97 & 54 & 75 & 200\\ 83 & 102 & 49 & 79\\ 71 & 210 & 150 & 180\end{pmatrix},$$

где a_{lk} и b_{lk} $(l=1,2,3;\ k=1,2,3,4)$ – накопленные с начала года объемы перевозок самолетами l типа на k-й авиалинии соответственно на 30 апреля и 1 сентября некоторого года.

Найти объемы перевозок, осуществленных самолетами каждого типа по каждой авиалинии за период с 30 апреля по 1 сентября.

13. Данные о продукции добывающей промышленности по определенным видам минерального сырья группируются по областям, являющимся основными поставщиками этого сырья. Заданы матрицы добычи

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}450 & 780 & 210\\ 1050 & 240 & 90\\ 1500 & 120 & 590\end{pmatrix} \text{ и } B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}520 & 910 & 220\\ 1080 & 580 & 290\\ 1460 & 830 & 600\end{pmatrix},$$

где a_{lk} и b_{lk} $(l,k=1,2,3)$ – объемы добычи минерального сырья k-го вида в l-й области в два разных года, тыс. т.

Рассчитайте матрицу приростов добычи за период с конца первого года на конец второго. Найти матрицу средних годовых размеров добычи.

14. Сведения о продажах торговой фирмы, объединяющей три магазина, заданы матрицами

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}17 & 4 & 12\\ 6 & 4 & 13\\ 11 & 4 & 8\\ 7 & 4 & 6\end{pmatrix},\ B=[b_{1k}]=\begin{pmatrix}20 & 5 & 10\\ 10 & 5 & 15\\ 20 & 5 & 8\\ 10 & 5 & 10\end{pmatrix},\ C=[c_{lk}]=\begin{pmatrix}12 & 3 & 4\\ 8 & 3 & 4\\ 10 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix},$$

где a_{lk}, b_{lk}, c_{lk} – суммы, вырученные на протяжении l-го сезона от продажи k-го вида товара по первому, второму и третьему магазинам соответственно.

Покажите, что в каждый сезон первый и третий магазины, вместе взятые, продали больше каждого вида товаров, чем второй магазин. Найдите общую выручку от продажи одинаковых товаров тремя магазинами по каждому сезону.

15. Предприятие производит три вида продукции используя четыре типа ресурсов. Цены в рублях единицы каждого вида продукции и типа ресурса постоянны и заданы соответственно векторами $p=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}$ и $z=\begin{pmatrix}z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{pmatrix}$. Выпуск продукции может производиться одним из двух способов. Первый способ описывается матрицей удельных затрат A_{ij} и обеспечивает вектор выпуска $x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}$, второй – матрицей удельных затрат B_{ij} и обеспечивает вектор выпуска $y=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}$. a_{ij}, b_{ij} – затраты в физических единицах i-го вида ресурса на производство j-го вида продукции в первом и втором способах, x_i, y_i – объемы выпуска i-го вида продукции в единицу времени. Какой способ производства дает большую прибыль и насколько? Значения матриц приведены ниже:

$$A=\begin{pmatrix}5&4&8\\10&12&15\\6&11&4\\3&2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&7&10\\9&15&12\\8&8&5\\2&2&3\end{pmatrix},\ p=\begin{pmatrix}110\\100\\120\end{pmatrix},\ z=\begin{pmatrix}8\\2\\1\\6\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}14\\10\\15\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}12\\10\\16\end{pmatrix}.$$

1.2. Введение в анализ

1.2.1. Понятие функции

Если каждому элементу (значению) x множества X поставить в соответствие определенный элемент (значение) y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y=f(x)$; при этом множество X называется областью определения функции y, а множество Y – областью значений функции y.

В экономике многие зависимости могут быть заданы как функции одной переменной: $y=f(x)$. Наличие этих функциональных зависимостей позволяет использовать для решения экономических задач методы математического анализа. Приведем в качестве примеров следующие наиболее часто применяемые в экономике функции.

Функция полезности (функция предпочтений) (рис. 1.1) – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности u количества x некоторого товара. В широком смысле функция полезности – зависимость полезности (эффекта) некоторого действия от его уровня (интенсивности).

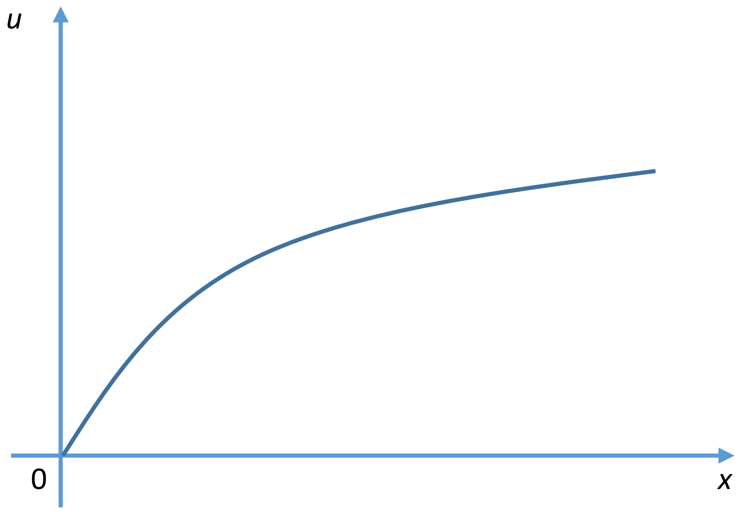


Рис. 1.1. График функции полезности

Функция выпуска (рис. 1.2) – зависимость объема y выпускаемой продукции от объема x перерабатываемого ресурса. Функция выпуска является частным видом производственной функции, которая выражает зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

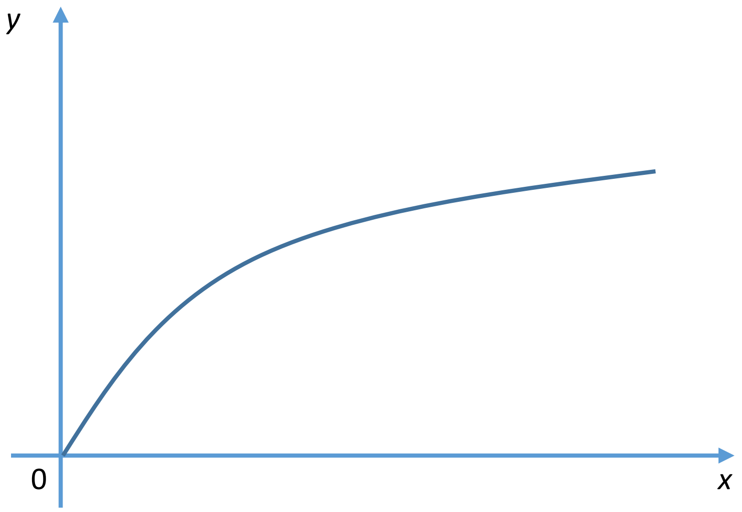


Рис. 1.2. График функции выпуска

Функция издержек – зависимость издержек производства от объема продукции. Функция издержек также есть частный вид производственной функции.

Функция спроса и предложения – зависимость объема спроса D и предложения S от цены на товар p.

Рассмотрим какой-нибудь товар. Пусть $D(p)$ – количество (число единиц) товара, которое покупатель желает купить на рынке при данной цене p за единицу продукции. В этом случае $D = D(p)$ называется функцией спроса на товар. Как правило, она имеет следующий вид:

$$D = kp^{a} + c, \tag{1.1}$$

где $a < 0$ (рис. 1.3).

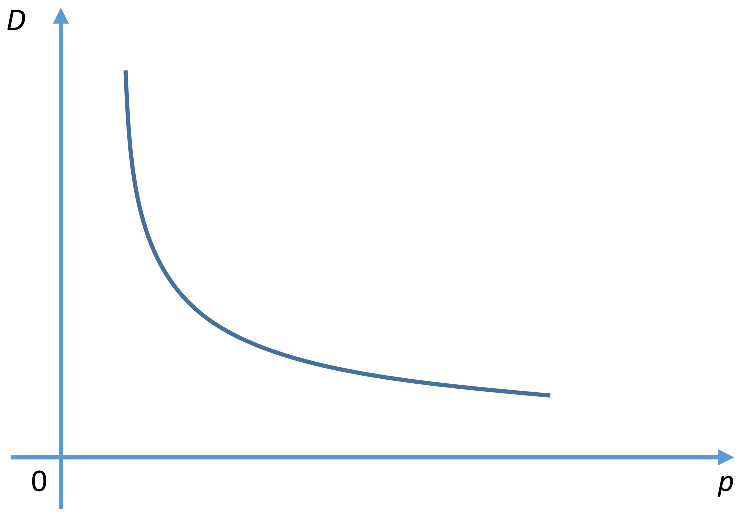


Рис. 1.3. График функции спроса

С другой стороны, пусть $S(p)$ – число единиц товара, предлагаемого продавцами на рынке по цене p. Очевидно, что предложение растет с ростом цены. Зависимость S от p имеет следующий вид:

$$S = p^b + d\,, \tag{1.2}$$

где $b \geq 0$ (рис. 1.4).

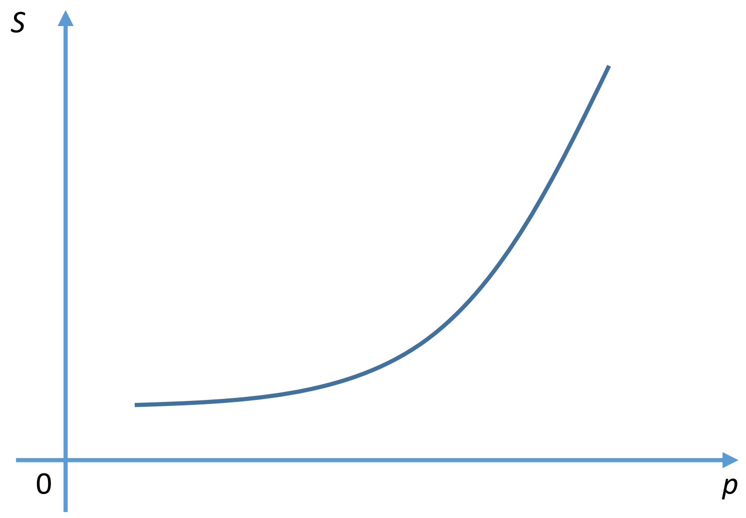


Рис. 1.4. График функции предложения

Параметры c и d – так называемые экзогенные величины; они зависят от ряда причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.).

Для экономики представляет интерес условие, когда спрос равен предложению:

$$D(p) = S(p)\,. \tag{1.3}$$

Цена $p = p_0$, при которой выполняется равенство (1.3), называется равновесной. Точка пересечения кривых D и S (графиков функций $D = D(p)$ и $S = S(p)$) называется **точкой равновесия** (точка M).

При увеличении благосостояния населения константа c в формуле (1.1) увеличивается, кривая D поднимается вверх, точка равновесия смещается вправо (цена на товар растет при неизменной кривой предложения S) (рис. 1.5).

Пример. Заданы функции спроса D и предложения S от цены p: $D = 2p + \dfrac{15}{p} - 5$, $S = 3p + \dfrac{15}{p} - 10$. Найти равновесную цену.

Решение. Вычислим равновесную цену p_0 – цену товара, при которой функции спроса и предложения имеют одинаковое значение:

$$2p + \frac{15}{p} + 5 = 3p + \frac{15}{p} + 10.$$

Решая уравнение, получаем $p = 5$.

Ответ. Равновесная цена $p_0 = 5$.

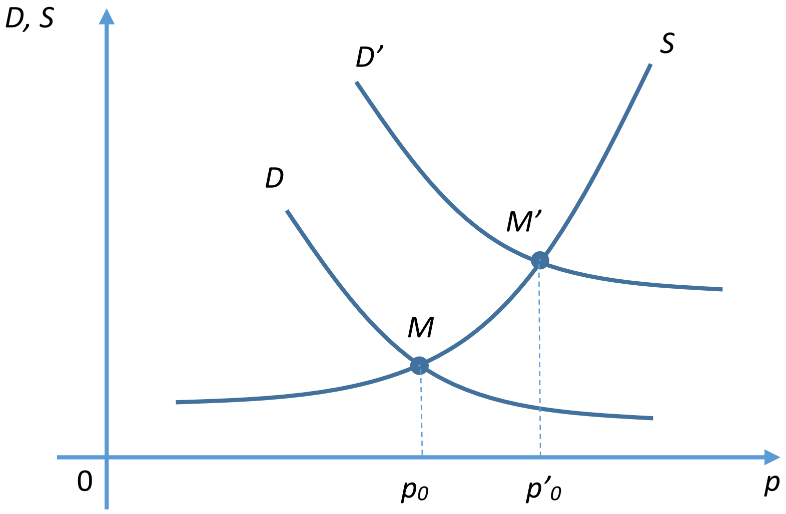


Рис. 1.5. Положение точки равновесия
в зависимости от благосостояния населения

1.2.2. Производная функции

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (при условии, что этот предел существует):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке (или на промежутке X).

Правила дифференцирования. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

1. $(cu)' = cu'$.
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Таблица производных:

1. $(C)' = 0, \ C - const;$

2. $(x^n)' = n x^{n-1}$, в частности, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

3 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, в частности, $(e^x)' = e^x;$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

5. $(\sin x)' = \cos x;$ 6. $(\cos x)' = -\sin x;$

7. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$ 8. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ 10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

11. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$ 12. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

1.2.3. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная константа.

Нахождение неопределенного интеграла от некоторой функции называется интегрированием этой функции. Операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны.

Основные свойства неопределенного интеграла:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx, \text{ где } k - \text{некоторое число},$$

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица интегралов:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \;\; n \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ где } a > 0, \; a \neq 1,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \text{ где } -a < x < a, \;\; a > 0,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arc}tg\frac{x}{a} + C, \;\; a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \;\; a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, \;\; a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C.$$

1.2.4. Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно точку ξ и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = \overline{1, n}$. Тогда сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть существует и конечный предел S этой интегральной суммы при стремлении к нулю длины максимального элементарного отрезка Δx_i, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и способа выбора точек ξ_i на отрезках разбиения. Тогда функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$, а число S – определенным интегралом от $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Достаточным условием интегрируемости функции является ее непрерывность на рассматриваемом отрезке.

Свойства определенного интеграла:

$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$, где k – некоторое число,

$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

$\int_a^a f(x)dx = 0$,

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

Если функция $y = f(x)$ – четная, то

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$,

Если функция $y = f(x)$ – нечетная, то

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Формула Ньютона – Лейбница. Определенный интеграл от непрерывной от отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ равен приращению любой ее первообразной $F(x)$ на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Площади плоских фигур.

Если функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$, то площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ (площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$)

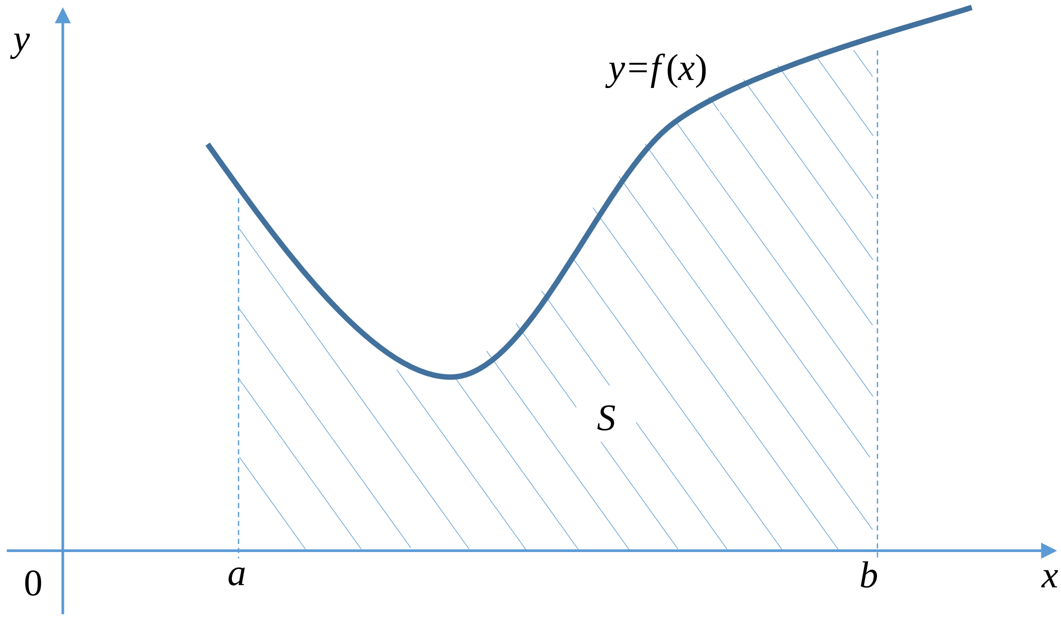


Рис. 1.6. Площадь криволинейной трапеции

численно равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ неположительна на отрезке $[a, b]$, то площадь S над кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$

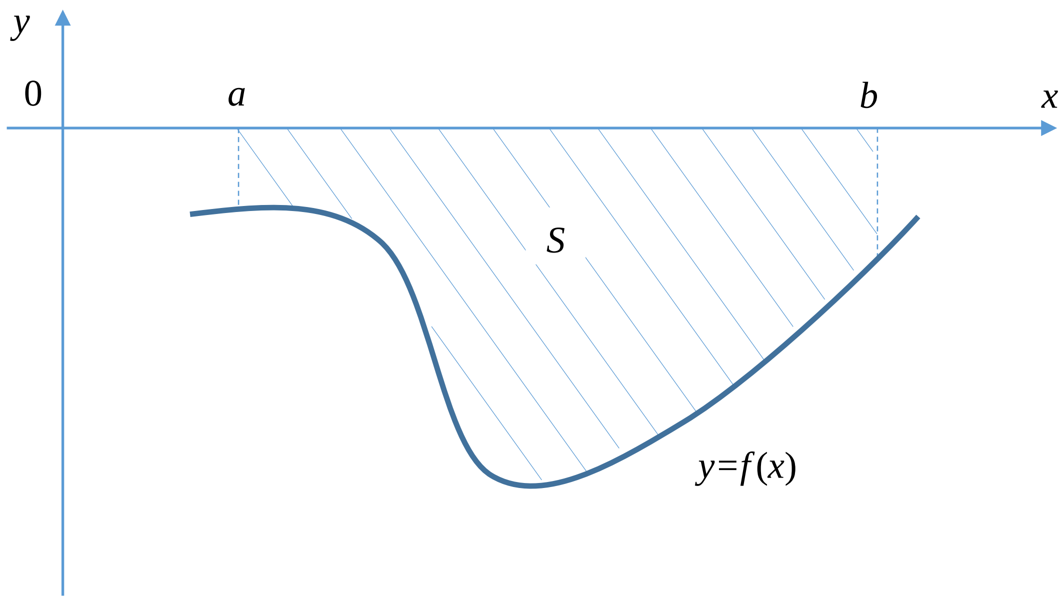


Рис. 1.7. Площадь криволинейной трапеции

равна определенному интегралу от $f(x)$ на данном отрезке, взятому со знаком «минус»:

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Если $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a, b]$, то площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на этом отрезке

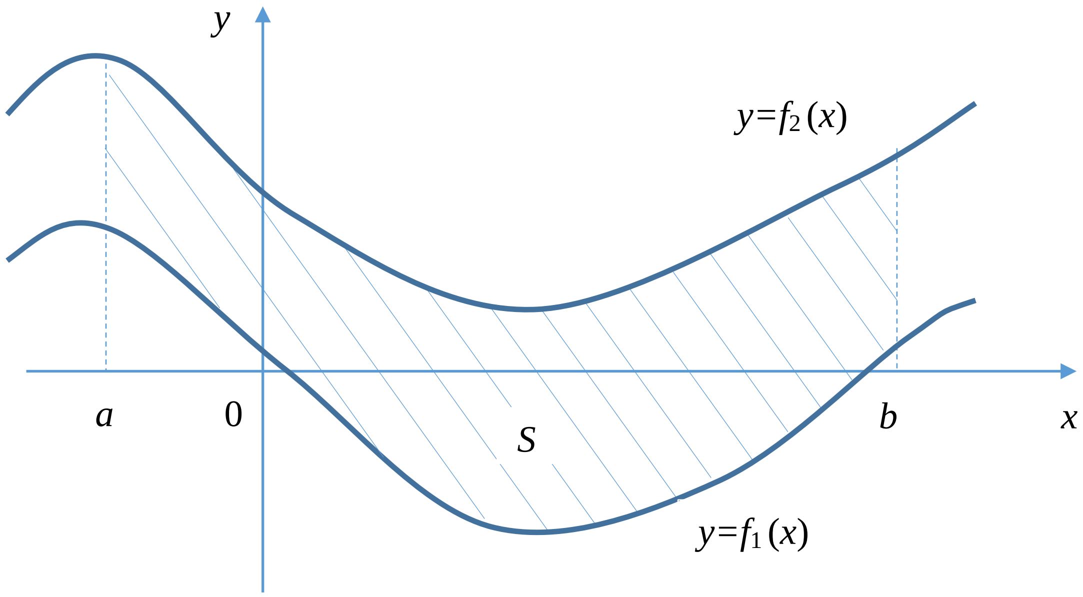


Рис. 1.8. Площадь криволинейной трапеции

определяется формулой

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

1.2.5. Задачи по теме «Введение в анализ»

1. Построить график таблично заданной функции:

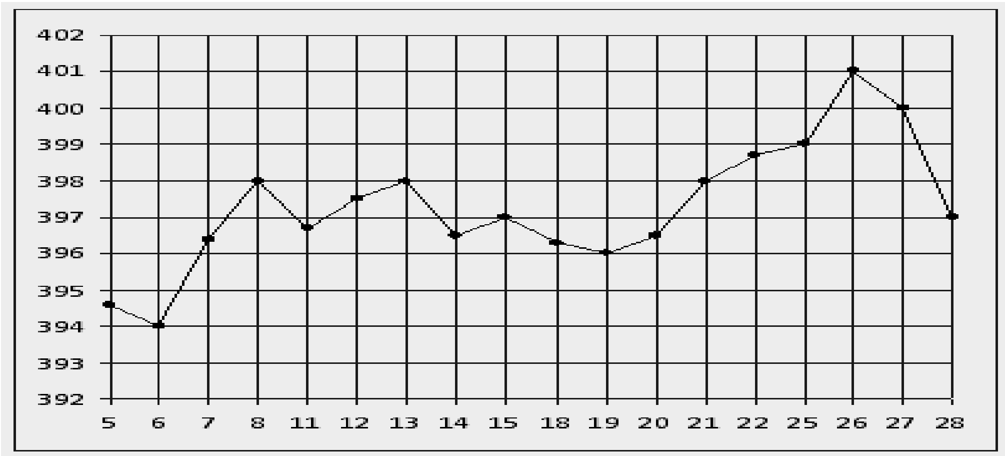
Цена кружки кофе американо, ден. ед.	2	3	3,5	4	5	6	7
Количество проданных за день кружек, шт.	70	65	63	60	60	50	25

2. Фирма «Алые паруса», выпускающая компьютерную технику, провела опрос дилеров и получила следующие сведения о спросе D на свою продукцию в зависимости от цены p:

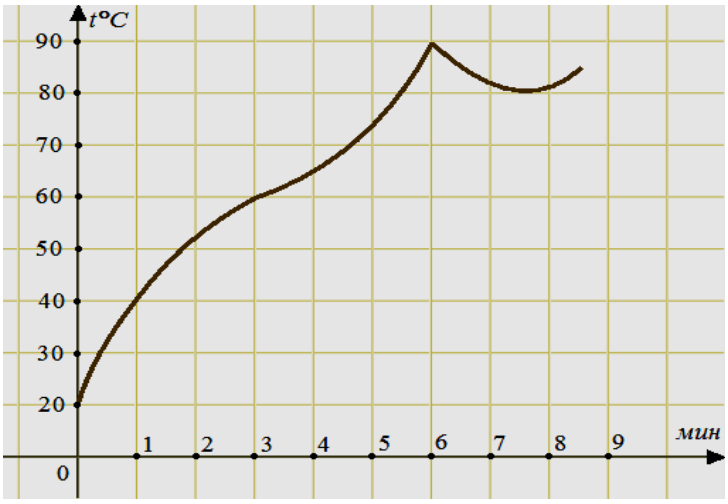
p, тыс. р.	1,7	1,9	2,0	2,1
D, тыс. шт.	27	25	19	9

Найти область определения и множества значений данной функциональной зависимости.

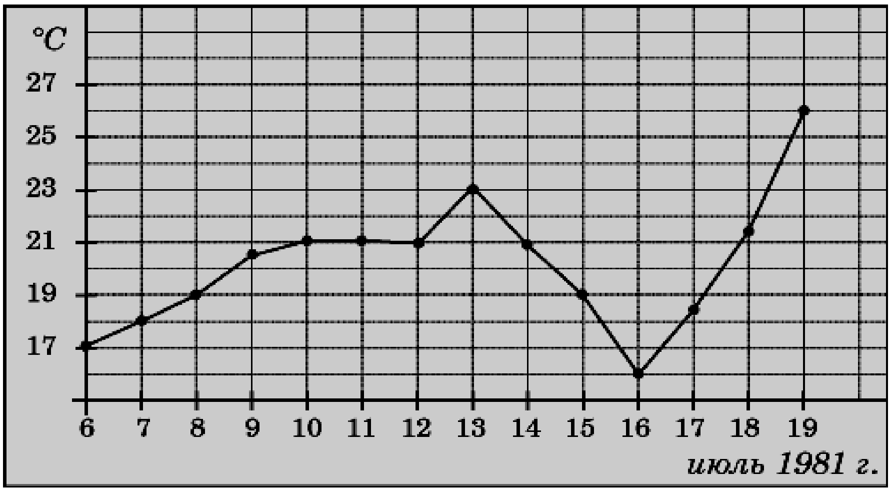
3. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 5 по 28 марта 1996 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена золота на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



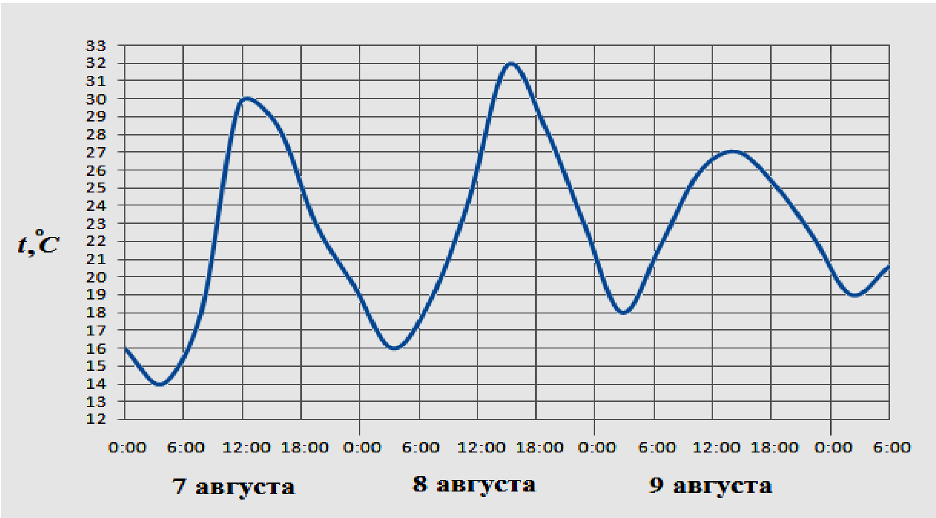
4. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия. За сколько минут двигатель нагревается от 600 до 900?



5. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период среднесуточная температура была ниже 20 градусов.



6. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 8 августа.



7. Затраты на производство продукции y (тыс. р.) выражаются уравнением $y=100+10x$, где x – количество месяцев. Доход от реализации продукции выражается уравнением $y=50+15x$. Начиная с какого месяца производство будет рентабельным?

Указание. Используйте условие безубыточности (значение прибыли равно нулю).

8. Заданы функции спроса D и предложения S от цены p: $D=10-p$, $S=3p-6$. Найти равновесную цену.

9. Заданы функции спроса D и предложения S от цены p: $D=\dfrac{3p+14}{p+3}$, $S=p+2$. Найти равновесную цену.

10. Заданы функции спроса D и предложения S от цены p: $D = \dfrac{20 + p^2}{1 + 10p}$, $S = \dfrac{2{,}5 - p + 4p^2}{1 + 10p}$. Найти равновесную цену.

11. Найти область определения следующих функций:

1) $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$; 2) $y = \ln(x + 3)$;

3) $y = \sqrt{5 - 2x}$; 4) $y = \sqrt{3x - 2x^3}$;

5) $y = \lg(x + 2) + \lg(x - 2)$; 6) $y = e^{x-2}$;

7) $y = (x - 2)\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$; 8) $y = \arcsin\dfrac{1 - 2x}{4}$.

12. Вычислить значение функций

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -\infty < x \le 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty \end{cases},$$

при заданных значениях аргумента $f(-2),\ f(0),\ f(1),\ f(2)$.

13. Найти:

1) линейную функцию (многочлен первой степени) $f(x) = ax + b$, если $f(0) = -2,\ f(3) = 5$, вычислить $f(1),\ f(2)$;

2) квадратичную функцию (многочлен второй степени) $f(x) = ax^2 + bx + c$, если $f(-2) = 0,\ f(0) = 1,\ f(1) = 5$, вычислить $f(-1),\ f(0{,}5)$.

3) многочлен третьей степени $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, если $f(-1) = 0,\ f(0) = 2,\ f(1) = -3,\ f(2) = 5$.

14. Вычислить производные y' данных функций:

1. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; 2. $y = \dfrac{10}{x^3} + x - \dfrac{1}{5x^5}$;

3. $y = x^7 - 2x^5 + 5 - \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{5}{6}\sqrt{x}$; 4. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 4\cos x + 2\sin x + \ln x + \ln 5$;

5. $y = 5^x - 7tgx + 3ctgx + arctgx$; 6. $y = e^x - \sqrt[7]{x^4} - 2\arccos x + 3\arcsin x$;

7. $y = (x^2 + 2x + 2)\cdot e^x$; 8. $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$;

9. $y = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x$; 10. $y = \dfrac{3x + 2}{2x + 3}$;

11. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

12. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

13. $y=\dfrac{x\ln x}{1+x}$;

14. $y=\dfrac{\cos x}{2-3\sin x}$;

15. $y=\dfrac{arctgx}{x}$;

16. $y=\dfrac{\ln x}{\cos x}+x\cdot tgx$;

17. $y=2x\cdot\sin x+(x^2-2)\cdot\cos x$;

18. $y=\ln(5x^2+2x^5)$;

19. $y=\sqrt{2-3x^4}$;

20. $y=\sin 6x$;

21. $y=(1-5x)^4$;

22. $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$

23. $y=\sin^2 x$;

24. $y=tg^3x-3tgx+3x$;

25. $y=\sin\sqrt{x}$;

26. $y=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}$;

27. $y=e^{\sin 2x}$;

28. $y=3^{\arccos 2x}$;

29. $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-5})$;

30. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;

31. $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

32. $y=\sin^5 x\cdot\cos 5x$;

33. $y=\arccos(\sin x^2)$;

34. $y=\dfrac{tg^3x}{tg3x}$;

35. $y=\ln(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$;

36. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$;

37. $y=tg\sin\cos x$;

38. $y=5^x+6^{\cos 2x}+\dfrac{1}{7^x}$;

39. $y=\sin e^{\sqrt{x}}+3^{\arccos 2x}$.

15. Найти интегралы:

1. $\int (x^2+2x+\frac{1}{x})dx;$ 2. $\int \frac{x-2}{x^3}dx;$ 3. $\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx;$

4. $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})dx;$ 5. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx;$ 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+\sin^2 x};$

7. $\int \frac{2dx}{\sqrt[4]{x^3}};$ 8. $\int (2x^8+e^x\cdot 2^x)dx;$ 9. $\int \left(2x^3-3x^2+4^{2x+1}\right)dx;$

10. $\int (2x^2+1)\cdot(2+3x^3)dx;$ 11. $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+1}dx;$

12. $\int \frac{dx}{x^2+8};$ 13. $\int \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}dx;$ 14. $\int \frac{(2\sqrt[3]{x}+1)^2 dx}{\sqrt[3]{x^4}}.$

16. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=\frac{x^2}{2}$, прямыми $x=1$, $x=3$ и осью абсцисс.

17. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x=2-y-y^2$ и осью ординат.

18. Вычислить площадь S, заключенную между кривыми $y=2-x^2$ и $y^3=x^2$.

19. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и графиком функции $y=x^2-2x$ при $x\in[0,3]$.

20. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

$a)$ $y=x^3,\ y=1,\ x=2;$

$b)$ $y=\cos x,\ y=0,\ x=\pm\frac{\pi}{4};$

$c)$ $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9;$

$d)$ $y=x^3,\ y=\sqrt{x};$

$e)$ $y=2x-x^2,\ y=\frac{3}{4}.$

2. Основы финансовой математики

2.1. Проценты, виды процентных ставок

Под процентными деньгами или процентами, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д.

Под процентной ставкой понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени – отношение дохода (процентных денег) к сумме долга. Она измеряется в виде десятичной или обыкновенной дроби или в процентах. При выполнении расчетов процентные ставки обычно измеряются в десятичных дробях.

В финансовом анализе процентная ставка применяется как измеритель степени доходности (эффективности) любой финансовой, кредитной, инвестиционной или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел место или нет факт непосредственного инвестирования денежных средств и процесс их наращения.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют периодом начисления. В качестве такого периода принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Проценты согласно договоренности, между кредитором и заемщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга (капитализация процентов). Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов называют наращением, или ростом, этой суммы. В этом случае процентные ставки называют ставками наращения.

При дисконтировании (сокращении) сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего дисконта (скидки). Соответственно говорят, что применяют дисконтные, или учетные ставки.

Для начисления простых процентов применяют постоянную базу начисления. Когда за базу принимается сумма, полученная на предыдущем этапе наращения или дисконтирования, используют сложные процентные ставки. В этом случае база начисления последовательно изменяется, т.е. проценты начисляются на проценты.

Процентные ставки могут быть фиксированными (в контракте указываются их размеры) или плавающими. В последнем случае указывается не сама ставка, а изменяющаяся во времени база (базовая ставка) и размер надбавки к ней – маржи. Размер маржи определяется рядом условий, финансовым положением заемщика, сроком кредита и т.д. Она может быть постоянной или переменной на протяжении срока ссудной операции.

2.1.1. Простые проценты

Под наращенной суммой ссуды (долга, депозита, других видов выданных в долг или инвестированных денег) понимают первоначальную ее сумму с начисленными процентами к концу срока начисления. Введем следующие обозначения:

1) P – первоначальная сумма (ден. ед.);

2) i – ставка наращения процентов $\left(\frac{i}{100}\right)$;

3) n – срок ссуды (год);

4) S_n – наращенная сумма за n лет.

Наращенная сумма представляет собой сумму первоначальной суммы и наращенных процентов: $S_n = P + Pni = P(1+ni)$. Выражение $(1+ni)$ называется множителем наращения простых процентов, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы.

Приведем формулу простых переменных процентов:

$$S_n = P(1+n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m) = P\left(1+\sum_{t=1}^{m} n_t i_t\right).$$

Здесь i_t – ставка простых процентов в периоде; n – продолжительность t периода начисления по ставке i_t.

2.1.2. Сложные проценты

Если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяют сложные проценты. Присоединение начисленных процентов к сумме базы начисления называют капитализацией процентов. Применим те же обозначения, что и в формуле наращения по простым процентам.

В конце первого года проценты равны величине Pi, а наращенная сумма составит $P + Pi = P(1 + i)$. К концу второго года она достигнет величины $P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$ и т.д.

В конце n-го года наращенная сумма будет равна $S_n = P(1+i)^n$. Величину $(1+i)^n$ называют множителем наращения по сложным процентам.

Приведем формулу наращения по сложным процентам при изменении ставки во времени:

$$S_n = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_k)^{n_k}.$$

Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_k$ последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно.

2.1.3. Задачи на тему «Простые и сложные проценты»

1. Пусть ссуда в 200 000 ден. ед. предоставляется на 0,5 года при простой ставке 12 % годовых. Определить сумму, причитающуюся к возврату.

2. Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 8 % годовых, а на каждый последующий на 0,5 % меньше, чем в предыдущий. Первоначальная сумма составляет 100 000 ден. ед. Определить наращенную сумму по окончании договора.

3. Исходная сумма кредита – 100 000 ден. ед. Ставка – 30 % годовых. Определить наращенную сумму по простым и сложным процентам за 0,5 года, 1 год и 2 года. Проанализировать полученные результаты.

4. Какой капитал образуется из 150 000 ден. ед., помещенных под сложные проценты на 12 лет и 6 месяцев, если период наращения равен трем месяцам по 15 % годовых?

5. Известна первоначальная сумма ссуды – 100 000 ден. ед., сложные проценты по которой начисляются в конце каждого квартала при номинальной годовой ставке 11 %. Найти наращенную сумму по истечении 5 лет.

6. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 15 % годовых, плюс маржа 6 % в первые два года, 8 % в третий год, 10 % в четвертый год. Определить наращенную сумму за 4 года, если первоначальная сумма составляла 100 000 ден. ед.

7. Университет производит замену персональных компьютеров каждые три года. При этом университет может выделять 300 000 р. ежегодно, размещая их под 8 % годовых. Какая сумма поступит в распоряжение университета по окончании трехлетнего срока?

8. Компании необходимо производить замену оборудования каждые 8 лет. Для этого выделяют определенные средства. Если компания может выделить 100 000 ден. ед. ежегодно и разместить их под 8 % годовых, то какая сумма будет в ее распоряжении по окончании 8 лет?

9. Первоначальный вклад, положенный в банк под 10 % годовых, равен 60 000 р. Найти размер вклада через 5 лет при начислении процентов а) по ставке простых процентов; б) по ставке сложных процентов, начисляемых ежегодно; в) по ставке сложных процентов, начисляемых ежеквартально.

10. Для обучения в вузе необходимо 100 000 р. Родители будущего студента положили в банк 65 000 р. под 6 % годовых (сложная процентная ставка). Будет ли у них необходимая сумма, если будущий студент еще пока учится в первом классе (считать обучение в школе 10 лет)?

11. Борис хочет вложить 50 000 р. на 5 лет, чтобы получить не меньше 75 000 р. Один банк предлагает вложить деньги под 8 % годовых, а другой – под 0,5 % в месяц. Какому банку отдать предпочтение Борису (сложная процентная ставка)?

12. За какой срок сумма, равная 75 000 р., достигнет 110 000 р. при условии, что на нее начисляются проценты по сложной ставке 7,5 % годовых: а) раз в год; б) поквартально?

13. Определить размер ежегодных выплат для ипотечной ссуды в 1 000 000 р. на срок 10 лет по 14 % годовых.

14. Первоначальная сумма кредита равна 500 000 р. Годовая процентная ставка равна 27 %.

1) срок кредита равен 4 года. Рассчитать накопленные суммы S_1, S_2, S_3, S_4 за каждый год. Построить график изменения сумм по годам;

2) срок кредита равен 7 месяцам. Необходимо: а) найти накопленную за 7 месяцев сумму одним платежом; б) рассчитать помесячную выплату кредита дифференцированными платежами;

3) рассчитать накопленную за 4 года сумму, если в первый год ставка равна 27 %, затем каждые 1,5 года она будет уменьшаться на 2 %.

15. Сумма вклада равна 300 000 р. Годовая процентная ставка равна 10 %. Срок вклада – 3 года.

1) рассчитать накопленные суммы S_1, S_2, S_3 за каждый год, построить график изменения сумм по годам;

2) найти накопленные суммы, если проценты считаются: а) ежеквартально; б) ежемесячно;

3) рассчитать накопленную за 3 года сумму, если в первый год ставка равна 10 %, затем на следующие 2 года она увеличится на 1,5 %.

3. Вероятностные методы в экономике

Теория вероятностей – наука, которая изучает закономерности массовых явлений. *Случайное явление* – явление, которое под воздействием ряда случайных причин каждый раз протекает по-разному, и предсказать исход такого явления невозможно.

Основные разделы теории вероятностей – случайные события и случайные величины.

3.1. Случайные события

Для решения многих задач по теории вероятностей используют основные правила и элементы комбинаторики.

3.1.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – наука о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно построить из заданного набора объектов.

Основные правила комбинаторики – правило суммы и правило произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект α можно выбрать n способами, а другой объект β можно выбрать m способами, то выбор «либо α, либо β» можно осуществить $m+n$ способами.

Пример. На тарелке лежат 8 яблок и 6 груш. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

Решение. В качестве объекта α будет выступать яблоко, в качестве объекта β – груша. Яблоко можно выбрать восемью способами, значит, $n=8$, грушу можно выбрать шестью способами, значит, $m=6$. Поскольку требуется выбрать только один фрукт, то используем правило суммы $m+n=8+6=14$. Таким образом, один фрукт можно выбрать 14-ю способами.

Правило произведения. Если некоторый объект α можно выбрать n способами, а после этого другой объект β можно выбрать m способами, то выбор пары объектов (α,β) можно осуществить $m\cdot n$ способами.

Пример. В студенческой столовой имеется 3 первых блюда и 4 вторых. Сколькими способами студент может составить себе обед?

Решение. Для того чтобы составить обед, нужно выбрать и первое блюдо, и второе, т.е. купить пару блюд. Поэтому для решения будем использовать правило произведения, $m\cdot n=3\cdot 4=12$, т.е. обед можно составить 12-ю способами.

Эти правила справедливы для любого количества объектов, в первом случае все способы складываются, во втором – умножаются. Если в примере про обед было бы еще 3 третьих блюда (чай, компот, кисель), то у студента было бы соответственно $3\cdot 4\cdot 3=36$ способов составить себе обед.

Необходимо понять разницу между этими правилами и уметь ориентироваться при решении текстовых задач. Чем принципиально отличаются эти правила? В каком случае какое правило следует использовать?

В первом случае мы выбирали один объект α или β, поэтому если в задаче надо сделать выбор или то, или другое, то нужно использовать правило суммы, т.е. слово «или» означает $+$.

Во втором случае мы выбирали пару объектов α и β, поэтому если в задаче надо сделать выбор и то, и другое, то нужно использовать правило произведения, т.е. слово «и» означает $\bullet$.

Кроме правил комбинаторики, для подсчета количества комбинаций можно использовать элементы комбинаторики (без повторений).

Первый элемент – размещения из n элементов по m элементов.

Пусть у нас имеется множество, в котором содержатся n элементов. Будем выбирать из него по одному элементу, присваивать ему порядковый номер, возвращать обратно не будем. Таким образом, у нас получится последовательность элементов с номерами $1,2,3,\ldots,m,$ причем $m<n$. Такие наборы из n элементов по m элементов, когда строго учитывается их порядок, называются *размещениями* из n элементов по m и обозначаются A_n^m, где нижний индекс n показывает, сколько элементов было во множестве, верхний индекс m показывает сколько элементов мы выбрали из исходного множества. Число всех возможных размещений можно посчитать по комбинаторной формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ (читается n факториал).

Пример. Пусть имеется множество из трех элементов $\{a,b,c\}$. Выписать все размещения по 2 элемента.

Решение. Множество состоит из трех элементов $\{a,b,c\}$, значит $n=3,$ требуется составить размещения по 2 элемента, значит $m=2$. Прежде чем выписывать комбинации, посчитаем количество вариантов $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6,$ т.е. должно получиться 6 комбинаций, отличающихся друг от друга составом и порядком: $ab, ac, bc, ba, ca, cb.$

Таким образом, если при выборе элементов их порядок имеет значение, то для решения задачи необходимо использовать размещения.

Пример. Сколькими способами можно из 6 членов правления выбрать председателя и заместителя?

Решение. Поскольку должности разные, порядок выбираемых людей будет иметь значение, поэтому искомое число способов определим как число размещений из 6 элементов по 2 элемента $A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 5\cdot 6 = 30.$

Следующий элемент комбинаторики – перестановки.

Перестановки отличаются от размещений тем, что из исходного множества выбирают все n элементов. По сути дела, одни и те же элементы меняют местами (переставляют), отсюда и название перестановки.

Перестановки обозначаются P_n, где индекс n указывает, сколько элементов участвует в перестановках. Количество различных перестановок можно посчитать по формуле

$$P_n = n!.$$

Можно сказать, что размещения из n элементов по n элементов – это есть перестановки из n элементов, т.е. $A_n^n = P_n$.

Пример. Пусть имеется множество из трех элементов $\{a, b, c\}$. Выписать все перестановки этих элементов.

Решение. Множество состоит из трех элементов $\{a, b, c\}$, значит, $n = 3$. Прежде чем выписывать комбинации, посчитаем количество вариантов $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, т.е. должно получиться 6 комбинаций, отличающихся друг от друга только порядком: $abc, acb, bca, bac, cab, cba.$

Таким образом, если при выборе элементов их количество не меняется, то для решения задачи необходимо использовать перестановки.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в состав числа только один раз?

Решение. Поскольку число трехзначное, значит количество элементов не изменится, поэтому используем формулу для перестановок – искомое количество трехзначных чисел $P_3 = 3! = 6$.

Третий элемент комбинаторики – сочетания из n элементов по m элементов.

Сочетания отличаются от размещений тем, что порядок выбираемых элементов значения не имеет. По сути дела, значение имеет только состав элементов.

Сочетания из n элементов по m обозначаются C_n^m и их количество можно посчитать по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Можно сказать, что сочетаний в $m!$ раз меньше, чем размещений, т.е. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{m!}$.

Заметим, что $C_n^1 = n$, $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Пример. Сколькими способами можно выбрать 2 разных пирожных, если в ассортименте кондитерской имеется 10 видов изделий?

Решение. Поскольку порядок пирожных не имеет значения, то искомое число пирожных $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = \dfrac{9 \cdot 10}{2} = 45.$

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны соотношением $A_n^m = P_m C_n^m$.

3.1.2. Примеры решения задач на тему «Элементы комбинаторики»

1. Сколько расписаний может составить диспетчерская, если на втором курсе изучается 11 различных дисциплин, каждый день у студентов по 5 занятий?

Решение. Количество расписаний – это число размещений из 11 элементов по 5 элементов, так как имеет значение порядок этих элементов, то $A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} =$

$= \frac{11!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440$.

2. Сколькими способами можно выбрать 3 кандидатов на научную конференцию, если в научном отделе работает 20 человек?

Решение. Поскольку никаких различий между кандидатами нет, то порядок выбираемых людей не имеет значения, поэтому для решения задачи будем использовать сочетания из 20 человек по 3, т.е. $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140$ способов.

3. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые начинаются цифрой 3?

Решение. Для решения этой задачи будем использовать перестановки, поскольку количество цифр не меняется. Если пятизначное число начинается с цифры 3, то оставшиеся четыре цифры можно переставить: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами.

4. Студенты института изучают в каждом семестре по десять дисциплин. В расписание занятий включаются каждый день по 3 дисциплины. Сколько различных расписаний может составить диспетчерская?

Решение. По своему смыслу эта задача такая же, как и первая. Если взять одни и те же дисциплины и расположить их разном порядке, то получатся разные расписания. Поэтому для решения используем размещения из 10 дисциплин по 3 дисциплины: $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

5. Наряд студентки состоит из брюк, топа и босоножек. Девушка имеет в своем гардеробе четыре пары различных брюк, пять топиков и три пары босоножек. Сколько дней она может одеваться в разные наряды?

Решение. Чтобы составить наряд, необходимо выбрать и брюки, и топ, и босоножки, т.е. нужно составить набор из трех элементов одежды, поэтому для решения задачи будем использовать правило произведения. Брюки можно выбрать четырьмя способами, топ – пятью способами, босоножки – тремя способами. В результате получим $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ вариантов разных нарядов.

6. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Этот же вопрос, если одна из полос красного цвета?

Решение. Будем считать флаги только с горизонтальными полосами. Если одни и те же цвета располагать в разном порядке, то будут получаться разные флаги. Это говорит о том, что порядок цветов имеет значение. Поэтому количество таких флагов – это число размещений из 5 элементов по 3 элемента. Так как имеет значение порядок этих элементов, то $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ различных флагов. Теперь нужно найти, сколько из этих 60 флагов с красной полосой. Проще подсчитать количество флагов, у которых нет красной полосы, – это число размещений из 4 ($5-1=4$ без красного цвета) элементов по 3, т.е. $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ флага без красной полосы. Тогда 60 – 24 = 36 – это количество флагов с красной полосой.

Можно эту задачу решить другим способом – напрямую найти то, что необходимо. Предположим, что одна полоса уже занята красным цветом, свободных полос осталось 2 и на них претендуют 4 цвета, тогда $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ флагов с красной полосой в определенном месте, например сверху. Такое же количество флагов будет с красной полосой посередине и столько же с красной полосой снизу, итого флагов с красной полосой $12+12+12=36$.

7. Из 20 сотрудников лаборатории 5 должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов группы, если заведующий лабораторией и 2 ведущих инженера одновременно уезжать не должны?

Решение. Поскольку выбираемые сотрудники никак не различаются между собой, то их порядок значения не имеет, поэтому для решения задачи будем использовать сочетания. Сначала найдем общее количество групп, которые могут поехать: $C_{20}^5 = \frac{20!}{5!(20-5)!} = \frac{20!}{5!\cdot 15!} = \frac{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{120} = 15504$. Но нужно учесть условие, что 3 конкретных человека не должны оказаться в одной из этих пятерок. Можно посчитать количество таких групп, т.е. 3 человека уже заняли 3 места в группе, свободных мест осталось $5-3=2$ и на эти 2 места претендуют 20 – 3 = 17 человек, поэтому таких групп будет $C_{17}^2 = \frac{17!}{2!(17-2)!} = \frac{17!}{2!\cdot 15!} = \frac{16\cdot 17}{2} = 136$ – это количество групп, которые не могут поехать, так как в их составе заведующий и два ведущих инженера. Теперь осталось из общего количества исключить ненужные группы: 15 504 – 136 = 15 368 – такое количество групп может поехать.

8. Состоялся шахматный турнир, в котором приняли участие несколько шахматистов, причем каждый из них сыграл с остальными по одной партии. Всего состоялось 45 партий. Сколько было шахматистов?

Решение. Эта задача в некотором смысле обратная предыдущим. Здесь известно количество комбинаций – 45, но неизвестно количество элементов, из которых эти комбинации составлялись. Пусть количество шахматистов – n. Так как порядок элементов значения не имеет и для шахматной партии необходимо 2 игрока, то $C_n^2 = 45$. Расписывая число сочетаний, получим $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = 45$, после сокращения и преобразования получим квадратное уравнение

$n^2 - n - 90 = 0,$ решая которое получим $n_1 = -9, n_2 = 10$. Таким образом, было изначально 10 шахматистов.

9. Сколько может быть пятизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если первые 3 цифры четные, а остальные нечетные?

Решение. Когда речь идет о числах, то, как правило, надо использовать размещения, потому что порядок цифр в числе всегда имеет значение, например 12 и 21 – это разные числа, а составлены они из одних и тех же цифр 1 и 2.

Разберемся сначала с четными цифрами. Всего четных цифр 4 (2, 4, 6, 8), из них нужно выбрать 3, т.е. $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ способа выбрать четные цифры. Теперь нечетные, всего нечетных цифр 5 (1, 3, 5, 7, 9), из них нужно выбрать 2 (поскольку число пятизначное, 3 четные, значит, 2 нечетные цифры) $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ способов выбрать нечетные цифры. Способы подсчитаны по отдельности, чтобы собрать их вместе, надо использовать правила комбинаторики. Поскольку число пятизначное, то надо выбрать и четные цифры, и нечетные, значит, используем правило произведения: $24 \cdot 20 = 480$ пятизначных чисел с заданными свойствами.

10. Помощники Деда Мороза (эльфы) готовят новогодние подарки для детей из 10 видов игрушек. В каждый подарок они могут положить не менее 5 и не более 8 различных игрушек. Сколько различных подарков могут составить эльфы?

Решение. Количество различных подарков – это число сочетаний (поскольку порядок игрушек в подарке не имеет значения) из 10 элементов по 5, 6, 7 или 8 элементов. Если эльфы будут класть по 5 игрушек, то они смогут составить $C_{10}^5 = 252$ подарка, если по 6 игрушек, то $C_{10}^6 = 210,$ если по 7 игрушек, то $C_{10}^7 = 120$, и если по 8, то $C_{10}^8 = 45$ подарков. Так как они могут положить 5 или 6 или 7 или 8 игрушек, то по правилу суммы нужно сложить все способы: 252 + + 210 + 120 + 45 = 627 подарков всего можно составить.

3.1.3. Задачи по теме «Элементы комбинаторики» для самостоятельного решения

1. В группе 25 студентов, среди которых 10 отличников. Каким числом способов можно отобрать 5 студентов так, чтобы трое из них были отличниками?

2. Из колоды в 52 карты вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется: а) ровно один туз; б) хотя бы один туз; в) не менее двух тузов; г) тройка, семерка, туз?

3. Из 10 книг 7 книг различных авторов и трехтомник одного автора помещены на одной книжной полке. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

4. В высшей лиге первенства по футболу разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Всего в высшей лиге 17 команд. Сколькими способами могут быть распределены медали?

5. Каким числом способов можно рассадить 5 гостей на 5 мест?

6. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь к кассе?

Ответы:

1) 12 600;

2) а) $C_4^1 C_{48}^9$; б) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$; в) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{49}^9$; г) $64C_{40}^7$;

3) 241 920;

4) 4 080;

5) 120;

6) 40 320.

3.1.4. Решение тестовых заданий по теме «Элементы комбинаторики»

1. В книжном шкафу стоят девятитомник Ф. Купера, восьмитомник В. Скотта, шеститомник М. Рида и пятитомник Р. Киплинга. Ученик выбирает одну книгу для внеклассного чтения. Сколькими способами он может это сделать?

1) 2 160;

2) 28;

3) 1;

4) 4;

5) 20;

6) нет верного ответа.

Решение. Поскольку ученик выбирает только одну книгу, то для решения используем правило суммы: 9 + 8 + 6 + 5 = 28.

2. Правление банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на одинаковые должности. Сколькими способами это можно сделать?

1) $A_{10}^3 = 720$;

2) $C_{10}^3 = 120$;

3) $P_3 = 6$.

Решение. Так как должности одинаковые, то порядок кандидатов значения не имеет, поэтому будем использовать сочетания $C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$ способов.

3. Сколькими способами 3 человека могут встать в очередь к кассе?

1) 6;

2) 3;

3) 1;

4) 9.

Решение. Искомое количество способов – это число перестановок из 3 элементов, т.е. $P_3 = 3! = 6$.

4. Решите уравнение: $C_x^2 = 45, x \in N$.

1) 100;

2) 8;

3) 10;

4) –9;
5) 5.

Решение. Распишем по формуле для числа сочетаний: $C_x^2 = \dfrac{x!}{2!(x-2)!} = 45.$ Теперь можно сократить $x!$ и $(x-2)!,$ в числителе останется $(x-1)x.$ После сокращения получится уравнение $\dfrac{(x-1)x}{2} = 45.$ Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые: $\dfrac{(x-1)x}{2} = 45 \Rightarrow x^2 - x - 90 = 0.$ Для решения квадратного уравнения вычисляем дискриминант $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361, \sqrt{D} = 19,$ теперь определяем корни $x_1 = \dfrac{1-19}{2} = -9,$ $x_2 = \dfrac{1+19}{2} = 10.$ Нижний индекс у числа сочетаний – это количество элементов, из которых производится отбор, поэтому он может принимать только положительные значения. Правильный ответ под цифрой 3).

5. Решите уравнение: $\dfrac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \dfrac{1}{6}, x \in N$.

1) 10;
2) 5;
3) 2;
4) –5;
5) 3;
6) 4.

Решение. Каждую перестановку распишем по формуле, получим:

$$\frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{(x-1)!(x-1)}{(x+1)!} = \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{1}{6}.$$

Решая это уравнение, получим: $x_1 = 2, x_2 = 3.$

3.1.5. Тестовые задания по теме «Элементы комбинаторики» для самостоятельного решения

1. Три дороги соединяют города А и В, четыре дороги соединяют города В и С. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В и вернуться обратно в А также через В?

1) 14;
2) 7;
3) 28;
4) 144;
5) 4;
6) 8;
7) нет верного ответа.

2. Правление банка выбирает из 10 кандидатов 3 человек на разные должности. Сколькими способами это можно сделать?

1) $A_{10}^3 = 720$;

2) $C_{10}^3 = 120$;

3) $P_3 = 6$.

3. Какие условия характерны для размещений из n элементов по m элементов?

1) состав элементов;
2) порядок элементов;
3) порядок и состав элементов.

4. Какие условия характерны для сочетаний из n элементов по m элементов?

1) состав элементов;
2) порядок элементов;
3) порядок и состав элементов.

5. Вычислите $A_5^3 - A_5^2$:

1) 10;
2) 20;
3) 30;
4) 40;
5) 0.

Ответы: **1.** 4). **2.** 1). **3.** 3). **4.** 1). **5.** 4).

3.1.6. Случайные события

Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия события и вероятности события.

Событие – это любой факт, который имеет место в природе. Любое событие может произойти или не произойти при выполнении определенного комплекса условий, который будем обозначать буквой G.

Все события можно условно разделить на три группы: достоверные, невозможные и случайные.

Событие, которое обязательно произойдет при выполнении определенного комплекса условий G, называется *достоверным* и обозначается Ω.

Например, пусть комплекс условий G – игральный кубик подбрасывается один раз, тогда достоверное событие $\Omega = \{$на верхней грани выпадет число, не большее 7$\}$.

Событие, которое обязательно не произойдет при выполнении определенного комплекса условий G, называется *невозможным* и обозначается $\emptyset$.

Например, пусть комплекс условий G – игральный кубик подбрасывается один раз, тогда невозможное событие $\emptyset = \{$на верхней грани выпадет число, большее 6$\}$.

Событие, которое может произойти, а может и не произойти при выполнении определенного комплекса условий G, называется *случайным*. Случайные события обозначаются латинскими буквами $A, B, C, \ldots$ или $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

Например, пусть комплекс условий G – игральный кубик подбрасывается один раз, тогда случайные события: $A=\{$на верхней грани выпадет четное число$\}$, $B=\{$на верхней грани выпадет число, кратное 6$\}$.

Любой единичный исход эксперимента называется *элементарным исходом* и обозначается ω. В реальном опыте элементарным событиям соответствуют взаимоисключающие исходы этого опыта. Вся совокупность таких исходов называется *множеством элементарных исходов* и обозначается Ω.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B, называется *суммой* событий A и B и обозначается $A+B$ или $A \cup B$.

Например, $A=\{$по итогам года сотрудник награжден премией$\}$, $B=\{$по итогам года сотрудник награжден путевкой в санаторий$\}$, тогда $A+B=\{$по итогам года сотрудник награжден премией или путевкой в санаторий$\}$.

Событие, состоящее в наступлении обоих из событий A и B, называется *произведением* событий A и B и обозначается AB или $A \cap B$.

Например, $A=\{$по итогам года сотрудник награжден премией$\}$, $B=\{$по итогам года сотрудник награжден путевкой в санаторий$\}$, тогда $AB=\{$по итогам года сотрудник награжден премией и путевкой в санаторий$\}$.

Событие, состоящее в наступлении события A и ненаступлении события B, называется *разностью* событий A и B и обозначается $A-B$ или A/B.

Например, $A=\{$по итогам года сотрудник награжден премией$\}$, $B=\{$по итогам года сотрудник награжден путевкой в санаторий$\}$, тогда $A-B=\{$по итогам года сотрудник награжден премией и не награжден путевкой в санаторий$\}$.

События называются *несовместными*, если их совместное появление невозможно при выполнении определенного комплекса условий G. В противном случае события называются *совместными*.

Например, пусть комплекс условий G– игральный кубик подбрасывается один раз, $A=\{$на верхней грани выпадет четное число$\}$, $B=\{$на верхней грани выпадет число, кратное 6$\}$. Эти события совместные, так как могут произойти одновременно (возможно их совместное появление). Если на верхней грани выпадет число 6, то про него можно сказать, что оно четное и в то же время кратное 3 (делится на 3).

Например, пусть комплекс условий G – игральный кубик подбрасывается один раз, $A=\{$на верхней грани выпадет четное число$\}$, $B=\{$на верхней грани выпадет нечетное число$\}$. Эти события несовместные, так как не могут произойти одновременно (нет таких чисел, которые одновременно являлись бы четными и нечетными).

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. То есть появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится только одно из этих событий.

Например, G – вынимание карты из колоды в 36 карт, A={карта крестовой масти}, B = {карта червовой масти}, C={карта пиковой масти}, D = {карта бубновой масти}. Эти события образуют полную группу, так как представляют собой все возможные исходы испытания.

События называются *равновозможными,* если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Например, пусть комплекс условий G – игральный кубик подбрасывается один раз, A={на верхней грани выпадет четное число}, B = {на верхней грани выпадет нечетно число}. Эти события равновозможные, поскольку среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 одинаковое количество четных и нечетных.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Для противоположных событий одновременно выполняются два условия: $A+\overline{A}=\Omega$, $A\cdot\overline{A}=\emptyset$.

Например, пусть комплекс условий G – производится один выстрел по мишени, A={попадание}, $\overline{A}$ ={промах}. Эти события противоположные, поскольку появление одного исключает возможность другого.

Пусть комплекс условий G – производится два выстрела по мишени, A={два попадания}, $\overline{A}$ ={хотя бы один промах}. Эти события противоположные, поскольку появление одного исключает возможность другого.

3.1.7. Примеры решения задач по теме «Случайные события»

1. Случайным образом выбирают одну из 28 костей домино. Описать множество элементарных исходов Ω. Перечислить все элементарные исходы, из которых состоят следующие события: A = {на выбранной кости очки совпадают}, B = {сумма очков на выбранной кости равна 6}, C = {произведение числа очков на выбранной кости нечетно}, $B-A,\ AB,\ AC,\ AB-C,\ (B+A)C.$

Решение. Эксперимент заключается в том, что из набора костей домино выбирают одну. Кость домино представляет собой пластину, поделенную на две части, на которых с помощью точек обозначены числа. Количество точек на каждой половине может быть от нуля (пусто) до шести включительно. Таким образом, исходом эксперимента является пара чисел, которые могут принимать значения от 0 до 6. Тогда множество элементарных исходов можно описать следующим образом: $\Omega=\{(x;y),\ x,y\in[0;6],\ x,y\in Z\}$.

Далее из этого множества нужно выбрать подмножества, соответствующие указанным событиям:

$A=\{(0;0),(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6)\}$,

$B=\{(0;6),(1;5),(2;4),(3;3)\}$, (исходы, например $(1;5)$ и $(5;1)$, – это одна и та же кость, поэтому записывается один из них),

$C=\{(1;1),(1;3),(1;5),(3;3),(3;5),(5;5)\}$,

$B-A=\{(0;6),(1;5),(2;4)\}$, (в разность попадают исходы, которые принадлежат B, но не принадлежат A),

$AB=\{(3;3)\}$, (в произведение попадают исходы, которые принадлежат и A и B одновременно),

$AC = \{(1;1),(3;3),(5;5)\}$,

$AB - C = \{\varnothing\}$, (нет исходов, которые принадлежали бы A и B одновременно, не принадлежали C),

$(B + A)C = \{(1;1),(3;3),(1;5),(5;5)\}$, (попали исходы из C, которые есть у A или B).

Теперь сформулируем события, которые получились в результате арифметических операций:

$B - A = \{$на выбранной кости сумма очков равна 6, но очки не совпадают$\}$,

$AB = \{$на выбранной кости сумма очков равна 6 и очки совпадают$\}$,

$(B + A)C = \{$на выбранной кости произведение очков нечетно, при этом либо очки совпадают, либо их сумма равна 6$\}$.

2. На 10 жетонах выбиты числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответов указаны все возможные исходы испытания: а) четное, нечетное; б) простое, 4, 6, 8, 9, 10; в) четное, 1, 3, 5; г) не более 3, не менее 4.

Решение.

а) все исходы, поскольку все числа либо четные, либо нечетные;

б) все исходы (простое число – число, которое делится только на само себя и на 1);

в) не все исходы, не хватает 7 и 9;

г) все исходы.

3. По мишени производятся 3 выстрела. Пусть события $A_i = \{$попадание при i-м выстреле, $i = 1,2,3\}$. Представить в виде суммы или произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: $A = \{$три попадания в мишень$\}$, $B = \{$три промаха$\}$, $C = \{$хотя бы одно попадание$\}$, $D = \{$хотя бы один промах$\}$, $E = \{$не менее двух попаданий$\}$, $F = \{$не больше одного попадания$\}$, $G = \{$попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле$\}$.

Решение.

$A = A_1 A_2 A_3$,

$B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

$C = A_1 + A_2 + A_3$,

$D = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$,

$E = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$

$F = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

$G = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$.

3.1.8. Задачи по теме «Случайные события» для самостоятельного решения

1. Указать, какие из следующих событий являются случайными, достоверными, невозможными: а) выигрыш по одному билету лотереи; б) извлечение цветного шара из урны, в которой находятся 3 синих и 5 красных шаров; в) получение абитуриентом 25 баллов при сдаче четырех экзаменов, если применяется пятибалльная система оценок; г) извлечение «дубля» из полной игры в домино; д) выпадение не более 6 очков на верхней грани игрального кубика.

2. Выяснить, совместные или несовместные следующие пары событий: а) выбранное наудачу натуральное число от 1 до 100 делится на 10, делится на 11; б) нарушение в работе первого, второго мотора летящего самолета; в) попадание, промах при одном выстреле; г) выигрыш, проигрыш в шахматной партии; д) наудачу выбранное число от 1 до 25 является четным, кратным 3.

3. Образуют ли полную группу следующие события: а) $G-$бросание монеты 1 раз, события: $A=\{$появление герба$\}$, $B=\{$появление цифры$\}$; б) $G-$бросание монеты 2 раза, события: $A=\{$появление двух гербов$\}$, $B=\{$появление двух цифр$\}$; в) $G-$два выстрела по мишени, события: $A=\{$ни одного попадания$\}$, $B=\{$одно попадание$\}$, $C=\{$два попадания$\}$; г) $G-$два выстрела по мишени, события: $A=\{$хотя бы одно попадание$\}$, $B=\{$хотя бы один промах$\}$; д) $G-$вынимание карты из колоды, события: $A=\{$появление карты червовой масти$\}$, $B=\{$появление карты бубновой масти$\}$, $C=\{$появление карты трефовой масти$\}$?

4. Назвать противоположные для следующих событий: $A=\{$три дня подряд шел дождь$\}$, $B=\{$среди пяти человек не ни одного мужчины$\}$, $C=\{$из трех облигаций хотя бы одна выигрывает$\}$, $D=\{$среди 4 карт все карты разной масти$\}$.

Ответы:

1. а) случайное; б) достоверное; в) невозможное; г) случайное; д) достоверное.

2. а) несовместные; б) совместные; в) несовместные; г) совместные; д) совместные.

3. а) да; б) нет; в) да; г) да; д) нет.

4. $\overline{A}=\{$хотя бы в один из трех дней не было дождя$\}$, $\overline{B}=\{$среди пяти человек хотя бы один мужчина$\}$, $\overline{C}=\{$из трех облигаций ни одна не выигрывает$\}$, $\overline{D}=\{$среди 4 карт хотя бы две одной масти$\}$.

3.1.9. Тестовые задания по теме «Случайные события» для самостоятельного решения

1. Пусть комплекс условий $G-$игральный кубик подбрасывается один раз, тогда в нем:

1) Ω = {выпадает число, меньшее 7};
2) $\emptyset$ = {выпадает дробное число};
3) $\emptyset$ = {выпадает четное число};
4) $\emptyset$ = {выпадает число, большее 6};
5) Ω = {выпадает целое число};
6) Ω = {выпадает нечетное число};
7) A = {выпадает четное число};
8) A = {выпадает нечетное число};

9) A = {выпадает отрицательное число};

10) A = {выпадает число, кратное 2}.

2. Победитель соревнований награждается: призом (событие A), денежной премией (событие B), медалью (событие C). Что представляют собой события:

1) A + B = {победитель награждается премией или призом};

2) A + B = {победитель награждается премией или призом, или и призом, и премией одновременно};

3) AB = {победитель награждается призом или премией};

4) AB = {победитель награждается премией и призом одновременно};

5) ABC = {победитель награждается одновременно и призом, и премией, и медалью};

6) AC – B = {победитель награждается одновременно призом и медалью без выдачи премии};

7) AC – B = {победитель награждается одновременно призом и медалью}.

3. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Рассматриваются следующие события: A = {попал 1-й стрелок}, B = {попал 2-й стрелок}. Данные события являются:

1) зависимыми;

2) независимыми;

3) совместными;

4) несовместными;

5) противоположными.

4. Если $A \subset B$, чему равны $A + B$ и $A \cdot B$?

1) B и B;

2) B и A;

3) A и A;

4) A и B.

5. Пусть A и $\overline{A}$ – противоположные события, тогда:

1) $A + \overline{A} = \Omega$;

2) $A \cdot \overline{A} = \emptyset$;

3) $A \cdot \overline{A} = \Omega$;

4) $A + \overline{A} = \emptyset$.

6. Событие, которое может произойти или не произойти в результате испытания, называется:

1) случайным;

2) достоверным;

3) невозможным.

7. События: выигрыш, ничья, проигрыш при одной игре в шахматы:

1) являются совместными;

2) являются несовместными;

3) образуют полную группу.

8. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ составляют полную группу попарно несовместных событий, тогда они удовлетворяют условиям:

1) $H_i \cdot H_j = \emptyset, i \neq j$ и $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$;

2) $H_i \cdot H_j = \emptyset, i \neq j$ и $H_1 \cdot H_2 \cdots H_n = \Omega$;

3) $H_i + H_j = \Omega, i \neq j$ и $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$.

9. Монета подбрасывается 3 раза. Рассматривается события $A = \{$хотя бы один раз выпал герб$\}$, тогда противоположное событие:

1) $\overline{A} = \{$1 раз выпал герб$\}$;

2) $\overline{A} = \{$2 раза выпал герб$\}$;

3) $\overline{A} = \{$3 раза выпал герб$\}$;

4) $\overline{A} = \{$2 раза выпала цифра$\}$;

5) $\overline{A} = \{$3 раза выпала цифра$\}$;

6) $\overline{A} = \{$герб не выпал ни разу$\}$.

10. Чему равны события: $A + A,\ A \cdot A,\ A + \emptyset,\ A \cdot \emptyset,\ A \cdot \Omega,\ A + \Omega$?

1) $\Omega,\quad \emptyset,\quad A,\quad \Omega,\quad \overline{A},\quad \emptyset$;

2) $\emptyset,\quad \overline{A},\quad \Omega,\quad \emptyset,\quad A,\quad A$;

3) $A,\quad A,\quad A,\quad \emptyset,\quad A,\quad \Omega$;

4) $\overline{A},\quad A,\quad \Omega,\quad \emptyset,\quad A,\quad \Omega$;

5) $\Omega,\quad \overline{A},\quad \emptyset,\quad \emptyset,\quad \Omega,\quad A$.

Ответы: **1.** 1), 2), 4), 5), 7), 8), 10). **2.** 1), 4), 5), 6). **3.** 2), 3). **4.** 2). **5.** 1), 2). **6.** 1). **7.** 2), 3). **8.** 1). **9.** 6). **10.** 3).

3.1.10. Определение вероятности случайного события

Для того чтобы сравнивать между собой случайные события по мере возможности их появления, необходимо с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем возможно это событие.

Для количественной оценки возможности появления случайного события вводится понятие вероятности.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называют отношение числа m исходов, благоприятных наступлению события A, к числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов эксперимента (опыта, испытания), образующих полную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Классическое определение вероятности можно использовать только в том случае, когда количество исходов испытания конечно и эти исходы равновозможные.

Пример. В урне 6 белых и 4 черных шара. Какова вероятность вынуть из урны 2 белых шара?

Решение. Сформулируем событие, вероятность которого нужно определить: $A = \{\text{вынуть из урны 2 белых шара}\}$. Для определения вероятности этого события нужно определить, в чем заключается эксперимент и что является исходом этого эксперимента. Эксперимент заключается в том, что из урны достают 2 шара. Количеством исходов эксперимента будет количество способов выбрать 2 шара из общего количества шаров. Поскольку порядок шаров в выборке не имеет значения, то для решения будем использовать сочетания. Общее число исходов испытания будет рассчитано как $n = C_{10}^2 = \frac{10!}{8!2!} = 45$. Число исходов, благоприятных для наступления события A, равно $m = C_6^2 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$. Тогда по формуле классического определения получим $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Геометрическое определение вероятности

Если количество исходов испытания не конечно (его невозможно подсчитать), классическое определение вероятности использовать нельзя. В таких случаях (когда число исходов бесконечно) вводят понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т.д.).

Пусть, например, на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в область G, попадет в область g. Вероятность попадания точки в какую-либо часть области G пропорциональна мере (mes) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG}.$$

Пример. Внутри эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ расположен круг $x^2 + y^2 = 9$. Найти вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом.

Решение. Эксперимент заключается в том, что в эллипс бросается материальная точка. Количество исходов эксперимента – количество точек внутри фигуры, которое невозможно подсчитать, так как оно бесконечно. Поскольку фигуры на плоскости, то в качестве меры можно использовать площадь. Пусть событие $A = \{\text{попадание точки в кольцо}\}$. Вероятность этого события определяется как отношение площадей, пусть $S_{кол}$ – площадь кольца, $S_{эл}$ – площадь эллипса и $S_{кр}$ – площадь круга. Тогда $P(A) = \frac{S_{кол}}{S_{эл}}$, где $S_{кол} = S_{эл} - S_{кр} = \pi ab - \pi r^2$. Так как $a = 5, b = 4, r = 3$, то

$$P(A)=\frac{20\pi-9\pi}{20\pi}=0{,}55\,.$$

3.1.11. Примеры решения задач по теме «Определение вероятности случайного события»

1. Из 6 карточек с буквами Р, М, Е, Н, Т, О выбирают наугад 4 карточки. Какова вероятность того, что: а) будут вынуты карточки с буквами Р, Е, М, О; б) при последовательном вынимании карточек получится слово МОРЕ.

Решение.

1. Событие $A=\{$будут вынуты карточки с буквами Р, Е, М, О$\}$, общее число испытаний – количество способов выбрать 4 карточки из 6. Поскольку порядок карточек в выборке не имеет значения, то можно использовать число сочетаний из 6 элементов по 4 элемента, т.е. $n=C_6^4=15.$ Число благоприятных исходов $m=1,$ так как только в одной выборке попадутся карточки с нужными буквами. По классическому определению вероятности $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{15}.$

2. Событие $A=\{$при последовательном вынимании карточек получится слово МОРЕ$\}$, общее число испытаний – это количество способов выбрать 4 карточки из 6, но в данном случае порядок карточек будет иметь значение, поэтому используем число размещений из 6 элементов по 4 элемента, т.е. $n=A_6^4=360.$ Число благоприятных исходов $m=1,$ так как только в одной выборке попадутся карточки с нужными буквами в определенном порядке. По классическому определению вероятности $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{360}.$

2. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад составляют пятизначное число без повторения цифр. Какова вероятность того, что составленное число будет четным?

Решение. Событие $A=\{$составленное число – четное$\}$. Поскольку количество цифр не изменилось, то общее число испытаний – это число перестановок из 5 элементов, т.е. $n=P_5=5!=120.$ Составленное число будет четным, если оно оканчивается на 2 или 4, поэтому для оставшихся 4 цифр количество перестановок равно $P_4=4!=24,$ число благоприятных исходов по правилу суммы m = 24 + 24 = = 48. По классическому определению вероятности $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}.$

3. В трех городах расположено 20 сбербанков, причем в первом – 5, во втором – 8, в третьем – 7. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных будет два из первого, один из второго и два из третьего города?

Решение. Событие $A=\{$среди отобранных будет два из первого, один из второго и два из третьего города$\}$. Поскольку порядок банков в выборке не имеет значения, то общее число испытаний – это число сочетаний из 20 элементов по 5 элементов, т.е. $n=C_{20}^5=15504.$ Число благоприятных исходов определим по правилу произведения $m=C_5^2\cdot C_8^1\cdot C_7^2=10\cdot 8\cdot 21=1680$. По классическому определению вероятности $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{1680}{15504}\approx 0{,}11$.

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1 000 кубиков, которые тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь: а) только 2 окрашенные грани, б) только одну окрашенную грань.

Решение.

1. Событие $A=\{$у кубика только 2 окрашенные грани$\}$. Эксперимент заключается в том, что из кучки кубиков выбирается один. Поэтому общее число испытаний – это количество кубиков, т.е. $n=1000$. Число благоприятных исходов – это количество кубиков с двумя окрашенными гранями. Так как объем куба равен 1 000, то на каждом ребре у него по 10 кубиков, угловые кубики окрашены с трех сторон, поэтому их исключаем, получается, что на одном ребре по 8 нужных нам кубиков. Теперь умножаем на количество ребер и получаем, что $m=8\cdot 12=96$. По классическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{96}{1000}=0{,}096.$$

2. Событие $A=\{$у кубика только 1 окрашенная грань$\}$, общее число испытаний – это количество кубиков, т.е. $n=1000$. Число благоприятных исходов – это количество кубиков с одной окрашенной гранью. Так как объем куба равен 1 000, то на каждом ребре у него по 10 кубиков и на каждой грани по 100 кубиков, 36 кубиков, которые лежат по периметру грани, окрашены с трех или с двух сторон, поэтому их исключаем. Получается, что на одной грани по 64 нужных нам кубика. Теперь умножаем на количество граней и получаем, что $m=64\cdot 6=384$. По классическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n}=0{,}384.$$

5. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник, угадавший 4, 5, 6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность того, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

Решение.

1. Событие $A=\{$будут угаданы все 6 цифр$\}$. Порядок цифр в выборке не имеет значения, поэтому общее число испытаний – это число сочетаний из 45 элементов по 6 элементов, т.е. $n=C_{45}^6=8145060$. Число благоприятных исходов $m=1$, поскольку только в одном случае в выборке окажутся нужные цифры. По классическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{8145060}\approx 0{,}0000001.$$

2. Событие $A = \{$будут угаданы 4 вида спорта из 6 выигравших$\}$, общее число испытаний – это число сочетаний из 45 элементов по 6 элементов, т.е. $n = C_{45}^{6} = 8145060$. Число благоприятных исходов $m = C_{6}^{4} \cdot C_{39}^{2} = 15 \cdot 741 = 11115$. По классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{11115}{8145060} = 0{,}0013646.$$

3.1.12. Задачи по теме «Определение вероятности случайного события» для самостоятельного решения

1. Из урны, в которой находятся 3 белых шара и 7 черных шаров, вынимают наудачу по одному 2 шара без возвращения. Найти вероятность того, что только один из извлеченных шаров будет белым.

2. Имеется 5 отрезков, длины которых равны 1, 3, 5, 7, 9 единицам. Определить вероятность того, что из 3 наудачу взятых отрезков можно построить треугольник.

3. Из 15 билетов, помеченных номерами от 1 до 15, выбирается один. Какова вероятность того, что номер вынутого билета: 1) делится на 2 и 3; 2) делится на 2 или 3.

4. При наборе телефонного номера абонент помнит только первые три цифры, остальные две забыл, но знает, что они: 1) различные; 2) различные и нечетные; 3) одинаковые; 4) ничего о них не знает. Какова вероятность того, что, набрав их наудачу, он получит нужный номер?

5. В автопарке 120 машин, занумерованных числами от 1 до 120. Какова вероятность того, что из автопарка выйдет машина, номер которой оканчивается 0?

6. В лотерее 100 билетов, из них 40 выигрышных. Какова вероятность того, что один из взятых наудачу 3 билетов окажется выигрышным?

7. В группе 25 студентов. Вызываются поочередно 2 студента, какова вероятность того, что будут вызваны Иванов и Петров?

8. В партии 100 изделий, из которых 4 – бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся: 1) одному потребителю; 2) обоим потребителям поровну?

9. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов?

10. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, среди отобранных окажется в черте города: 1) 3 сбербанка; 2) хотя бы один?

Ответы: **1.** $\frac{7}{15}$. **2**. 0,3. **3.** 1) $\frac{2}{15}$; 2) 0,6. **4.** 1) 1/90; 2) 0,05; 3) 0,1; 4) 0,01. **5.** $\frac{1}{10}$. **6.** 0,4378. **7.** $\frac{1}{600}$. **8.** 0,117; 0,383. **9**. 1/120. **10.** 0,348; 0,985.

3.1.13. Решение тестовых заданий по теме «Определение вероятности случайного события»

1. Из урны, в которой находятся 6 белых шаров и 4 черных шара, вынимают одновременно 4 шара. Тогда вероятность того, что среди отобранных 3 шара будут белыми, равна:

1) $\frac{8}{21}$;

2) $\frac{2}{21}$;

3) $\frac{2}{105}$;

4) $\frac{1}{2}$.

Решение. Для вычисления события $A = \{$среди отобранных шаров три шара будут белыми$\}$ воспользуемся формулой классического определения вероятности $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, а m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. В нашем случае общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь четыре шара из десяти имеющихся, т.е. $n = C_{10}^4$. А общее число благоприятствующих исходов равно числу способов, которыми можно извлечь три белых шара из шести и один черный шар из четырех, т.е. $m = C_6^3 \cdot C_4^1$. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^3 \cdot C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$.

2. Игральная кость бросается два раза. Тогда вероятность того, что сумма выпавших очков – десять, равна…

1) $\frac{1}{12}$;

2) $\frac{1}{36}$;

3) $\frac{5}{36}$;

4) 0.

Решение. Для вычисления события $A = \{$сумма выпавших очков будет равна десяти$\}$ воспользуемся формулой $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, а m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. В нашем случае возможны по правилу произведения $n=6\cdot 6=36$ элементарных исходов испытания, из которых благоприятствующими являются исходы вида $(5+5),(6+4),(4+6)$, т.е. $m=3$. Следовательно, $P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

3. В круг радиуса 8 помещен меньший круг радиуса 5. Тогда вероятность того, что точка, наудачу брошенная в больший круг, попадет также и в меньший круг, равна…

1) $\frac{25}{64}$;

2) $\frac{5}{8}$;

3) $\frac{39}{64}$;

4) $\frac{3}{8}$.

Решение. Для вычисления вероятности искомого события воспользуемся формулой геометрического определения вероятности, в качестве меры области будем использовать площадь $P(A)=\frac{S_1}{S_2}$, где S_1 – площадь меньшего круга, а S_2 – площадь большего круга. Следовательно, $P(A)=\frac{\pi\cdot 5^2}{\pi\cdot 8^2}=\frac{25}{64}$.

4. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Тогда вероятность того, что номер набран правильно, равна…

1) $\frac{1}{20}$;

2) $\frac{1}{4}$;

3) $\frac{1}{90}$;

4) $\frac{1}{5}$.

Решение. Для вычисления события $A=\{$номер набран правильно$\}$ воспользуемся формулой $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, а m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. Вычислим общее число элементарных исходов испытания. Предпоследний номер можно набрать пятью способами (1, 3, 5, 7, 9), а последний – четырьмя, так как набранные цифры должны быть разными. Тогда по правилу произведения $n = 5 \cdot 4 = 20,$ из которых благоприятствующим является один исход (правильный номер), т.е. $m = 1$. Следовательно, $P(A) = \dfrac{1}{20}$.

5. В партии из 12 деталей имеется 5 бракованных. Наудачу отобраны три детали. Тогда вероятность того, что среди отобранных деталей нет бракованных, равна…

1) $\dfrac{7}{44}$;

2) $\dfrac{1}{22}$;

3) $\dfrac{7}{12}$;

4) $\dfrac{1}{4}$.

Решение. Для вычисления события $A = \{$среди отобранных деталей нет бракованных$\}$ воспользуемся формулой $P(A) = \dfrac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, а m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. В нашем случае общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из 12 имеющих, т.е. C_{12}^3. А общее число благоприятствующих исходов равно числу способов, которыми можно извлечь три не бракованные детали из семи, т.е. C_7^3. Следовательно, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_7^3}{C_{12}^3} = \dfrac{7}{44}$.

3.1.14. Тестовые задания по теме «Определение вероятности случайного события» для самостоятельного решения

1. Из коробки, в которой находятся 6 черных шаров и 4 белых шара, вынимают одновременно 3 шара. Тогда вероятность того, что среди отобранных два шара будут черными, равна…

1) $\dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{3}{10}$;

3) $\dfrac{1}{8}$;

4) $\dfrac{1}{30}$.

2. Игральный кубик бросается два раза. Тогда вероятность того, что сумма выпавших очков – семь, а разность – три, равна…

1) $\frac{1}{18}$;

2) $\frac{1}{9}$;

3) $\frac{7}{36}$;

4) 0.

3. Внутрь круга радиуса 4 наудачу брошена точка. Тогда вероятность того, что точка окажется вне вписанного в круг квадрата, равна…

1) $\frac{\pi - 2}{\pi}$;

2) $\frac{2 - \pi}{\pi}$;

3) $\frac{2}{\pi}$;

4) $\frac{\pi}{2}$.

4. Игральный кубик бросается два раза. Тогда вероятность того, что сумма выпавших очков не меньше девяти, равна…

1) $\frac{1}{4}$;

2) $\frac{1}{6}$;

3) $\frac{3}{4}$;

4) 0.

5. В партии из 12 аппаратов имеется 5 бракованных. Наудачу отобраны 3 аппарата. Тогда вероятность того, что среди отобранных аппаратов нет годных, равна…

1) $\frac{1}{22}$;

2) $\frac{7}{44}$;

3) $\frac{5}{12}$;

4) $\frac{3}{5}$.

Ответы: **1.** 1). **2.** 1). 3. 1). **4.** 1). **5.** 1).

3.1.15. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Условная вероятность

1. Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Эта теорема обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Из теоремы сложения следует важное следствие (свойство вероятностей противоположных событий): $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Вероятность суммы двух совместных событий определяется соотношением $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Пример. В ящике 2 белых и 10 черных шаров. Из ящика вынули 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары белые или черные?

Решение. Пусть событие $A=\{$оба шара белые или черные$\}$. Разобьем это событие на частные случаи: $A_1=\{$оба шара белые$\}$, $A_2=\{$оба шара черные$\}$. Тогда $A=A_1+A_2$, где A_1 и A_2 – несовместные события, поэтому

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_2^2}{C_{12}^2}+\frac{C_{10}^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{66}+\frac{45}{66}=\frac{46}{66}=\frac{23}{33}.$$

Для определения вероятностей событий A_1 и A_2 используется классическое определение вероятности, для подсчета количества всевозможных и благоприятных исходов – число сочетаний, так как порядок шаров в выборке не имеет значения.

Пример. Один раз подбрасывается игральный кубик. Найти вероятность того, что на верхней грани выпадет четное или кратное 3 число.

Решение. Пусть событие $A=\{$на верхней грани выпадет четное или кратное 3 число$\}$. Разобьем это событие на частные случаи: $A_1=\{$на верхней грани выпадет четное число$\}$, $A_2=\{$на верхней грани выпадет кратное 3 число$\}$. Тогда $A=A_1+A_2$, где A_1 и A_2 – совместные события, поэтому $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B. Вероятность события A, вычисленная при условии, что произошло другое событие B, называется условной вероятностью и обозначается $P(A/B)$.

Условие независимости события A от события B можно записать в виде $P(A/B)=P(A)$, а условие зависимости – в виде $P(A/B)\neq P(A)$.

2. Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого, подсчитанную при условии, что первое событие уже произошло:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Если события A и B независимые, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Эта теорема обобщается на случай произвольного числа событий:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)P(A_2/A_1)\cdots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

В случае независимых в совокупности событий справедлива формула

$$P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i).$$

Пример. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара белые?

Решение. Пусть событие $A=\{$оба вынутые шара – белые$\}$, $A_1=\{$появление белого шара из 1-го ящика$\}$, $A_2=\{$появление белого шара из 2-го ящика$\}$. Тогда $A=A_1\cdot A_2$, где A_1 и A_2 – независимые события, так как шары вытягиваются из разных ящиков, т.е. вероятность для шара из второго ящика никак не зависит от того, какой шар вытянули из первого ящика, поэтому

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{2}{12}\cdot\frac{8}{12}=\frac{1}{9}.$$

Пример. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика без возвращения вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они оба белые.

Решение. Пусть событие $A=\{$оба вынутые шара – белые$\}$, $A_1=\{$появление белого шара при 1-м испытании$\}$, $A_2=\{$появление белого шара при 2-м испытании$\}$. Тогда $A=A_1\cdot A_2$, где A_1 и A_2 – зависимые события, так как шары вытягиваются из одного ящика, т.е. вероятность для второго шара напрямую зависит от того какого цвета шар вынули при 1-м испытании, поэтому

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)=\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}=\frac{15}{91}.$$

3.1.16. Примеры решения задач по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей»

1. Из урны, содержащей 6 белых, 4 черных и 2 оранжевых шара, наугад одновременно извлекают 3 шара. Какова вероятность того, что это будут шары одного цвета?

Решение. Событие $A=\{$шары одного цвета$\}$, распишем это событие на частные случаи: $A_1=\{$шары белые$\}$, $A_2=\{$шары черные$\}$, $A_3=\{$шары оранжевые$\}$, тогда $A=A_1+A_2+A_3$, где A_1, A_2, A_3 – несовместные события, поскольку одновременно произойти не могут. Поэтому

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+$$
$$+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}+\frac{C_4^3}{C_{12}^3}+\frac{0}{C_{12}^3}=\frac{20}{220}+\frac{4}{220}=\frac{24}{220}=\frac{6}{55}.$$

Для определения вероятностей событий A_1, A_2 и A_3 используется классическое определение вероятности, для подсчета количества всевозможных и благоприятных исходов – число сочетаний, так как порядок шаров в выборке не имеет значения.

2. Из колоды карт (36 карт) наугад достают одну карту. Пусть событие $A=\{$картой окажется дама$\}$, а событие $B=\{$карта черной масти (пики или трефы)$\}$. Найдите $P(A+B)$.

Решение. Событие $A=\{$выпадет дама$\}$, $B=\{$выпадет карта черной масти$\}$. A и B – совместные события, так как они могут произойти одновременно, т.е. выпадет карта с дамой черной масти (например, крестовая дама). Поэтому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{4}{36}+\frac{18}{36}-\frac{2}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}.$$

3. Предприятие в среднем выпускает 21 % продукции высшего сорта и 70 % продукции первого сорта. Какова вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта?

Решение. Событие $A=\{$изделие первого или высшего сорта$\}$. Разобьем это событие на частные случаи: $A_1=\{$изделие первого сорта$\}$, $A_2=\{$изделие высшего сорта$\}$, тогда $A=A_1+A_2$, где A_1, A_2 – несовместные события, поскольку одно и то же изделие не может быть одновременно и первого и высшего сорта. Поэтому $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=$ 0,21 + 0,7 = 0,91.

4. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 располагаются в ряд. Какова вероятность того, что первой окажется четная, а последней – нечетная цифра?

Решение. Событие $A=\{$первой окажется четная цифра$\}$, $B=\{$последней окажется нечетная цифра$\}$, тогда $C=A\cdot B$, где A, B – зависимые события, поскольку цифры выбираются из одного множества, т.е. вероятность последней цифры напрямую зависит от того, кокой оказалась первая цифра. Поэтому

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)P(B/A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}.$$

5. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга предсказывают погоду (ясно – пасмурно) в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0,1 и 0,3 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания ошибочны?

Решение. Событие $A=\{$предсказания синоптиков совпали$\}$, $B=\{$синоптики Аляски и Чукотки не ошиблись$\}$, $C=\{$синоптики Аляски и Чукотки ошиблись$\}$, тогда $P(A)=P(B+C)=0{,}9\cdot 0{,}7+0{,}1\cdot 0{,}3=0{,}66.$ Теперь найдем условную вероятность из теоремы умножения для зависимых событий:

$$P(C/A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}3}{0{,}66}=\frac{3}{66}=\frac{1}{22}.$$

3.1.17. Задачи по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей» для самостоятельного решения

1. Из 30 вопросов, включенных в программу экзамена, студент подготовил лишь 18. На экзамене ему будет предложено пять вопросов, причем для получения положительной оценки нужно правильно ответить хотя бы на три из них. Что более вероятно: сдаст студент экзамен или нет?

2. Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Иркутске, 8 в Ангарске и 7 в Шелехове. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

3. В урне 20 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают наугад два шара подряд. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.

4. В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

5. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: только второй экзамен, только один экзамен, все три экзамена, по крайней мере два экзамена, хотя бы один экзамен.

6. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров, добавляют два черных шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что хотя бы один шар будет белым.

7. Городская товарная станция доставляет получателям груз автотранспортом. Вероятность того, что в определенный день товарной станции потребуется трехтонная машина, равна 0,9, пятитонная – 0,7. Определить вероятность того, что товарной станции потребуется хотя бы одна автомашина.

8. Для повышения надежности прибора он дублируется другим точно таким же прибором, надежность безотказной работы каждого прибора равна 0,9. При выходе из строя первого прибора происходит мгновенное переключение на второй. Какова надежность системы двух дублирующих друг друга приборов?

9. У остановочной платформы на привокзальной площади останавливаются автобусы 6 маршрутов с одинаковой частотой движения. Какова вероятность того, что из двух первых автобусов один окажется нужного маршрута?

10. Из урны, в которой лежат 3 белых шара и 7 черных, наудачу по одному извлекают два шара без возвращения. Найти вероятность того, что только один из извлеченных шаров будет белым.

Ответы: **1.** Сдаст. **2.** 0,331. **3.** 0,046. **4.** 0,438. **5.** 0,018, 0,044, 0,648, 0,954, 0,998. **6.** 0,878. **7.** 0,97. **8.** 0,99. **9**. 0,278. **10.** 0,47.

3.1.18. Решение тестовых заданий по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей»

1. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров, добавляют два черных шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Тогда вероятность того, что хотя бы один шар будет белым, равна…

1) $\dfrac{251}{286}$;

2) $\dfrac{35}{286}$;

3) $\dfrac{6}{13}$;

4) $\dfrac{138}{143}$.

Решение. Введем обозначения событий: $A_k = \{k -$й вынутый шар будет белым$\}$, $k = 1,2,3$, A = $\{$хотя бы один шар будет белым$\}$. Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3)$, где $\overline{A}_k = \{k -$й вынутый шар не будет белым$\}$. Так как по условию задачи все шары извлекаются из одной урны, то события A_1, A_2 и A_3 зависимы, поэтому

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 / \overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3 / \overline{A}_1 \overline{A}_2) = 1 - \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{251}{286}.$$

2. В электрическую цепь последовательно включены два элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов элементов равны соответственно 0,1 и 0,15. Тогда вероятность того, что тока в цепи не будет, равна…

1) 0,235;

2) 0,765;

3) 0,22;

4) 0,015.

Решение. Введем обозначения событий: $A_k = \{k -$й элемент откажет$\}$, $k = 1,2$, $A = \{$тока в цепи не будет$\}$. Тогда

$P(A)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)+P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}1\cdot 0{,}85+0{,}9\cdot 0{,}15+0{,}1\cdot 0{,}15=$
$=0{,}235.$

Можно эту задачу решить по-другому через вероятность противоположного события. К событию $A=\{$тока в цепи не будет$\}$ противоположным будет $\overline{A}=\{$ оба элемента работают$\}$, тогда $P(\overline{A})=0{,}9\cdot 0{,}85=0{,}765$. Тогда вероятность искомого события $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}765=0{,}235.$

3. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,15; второй – 0,05; третий – 0,2. Тогда вероятность того, что в течение часа потребуют вмешательства наладчика все три станка, равна…

1) 0,0015;

2) 0,4;

3) 0,015;

4) 0,9985.

Решение. Введем обозначения событий: $A_k=\{k-$й станок потребует вмешательства наладчика, $k=1,2,3\}$, $A=\{$вмешательства наладчика потребуют все три станка$\}$. Тогда, учитывая, независимость событий, получим: $P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}15\cdot 0{,}05\cdot 0{,}2=0{,}0015.$

4. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, а вторым – 0,85. Оба стрелка стреляют одновременно. Тогда вероятность поражения цели, равна…

1) 0,985;

2) 0,775;

3) 0,875;

4) 1,75.

Решение. Введем обозначения событий: $A=\{$цель поражена первым стрелком$\}$, $B=\{$цель поражена вторым стрелком$\}$. Так как эти события совместны и независимы, то искомую вероятность можно вычислить как $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0{,}9+0{,}85-0{,}9\cdot 0{,}85=0{,}985.$

Можно эту задачу решить по-другому через вероятность противоположного события. К событию $A+B$ противоположным будет $\overline{A+B}=\{$ оба промахнутся$\}$, тогда $P(\overline{A+B})=0{,}1\cdot 0{,}15=0{,}015$. Тогда вероятность искомого события $P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-0{,}015=0{,}895.$

5. Из урны, в которой лежат 3 белых и 7 черных шара, наудачу по одному извлекают два шара без возвращения. Тогда вероятность того, что только один из извлеченных шаров будет белым, равна…

1) $\frac{7}{15}$;

2) $\frac{3}{10}$;

3) $\frac{3}{5}$;

4) $\frac{1}{3}$.

Решение. Введем обозначения событий: $A_k = \{k -$й вынутый шар будет белым$\}$, $A = \{$только один из извлеченных шаров будет белым$\}$. Тогда $A = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2$, и так как по условию задачи шары извлекаются по одной урне, то события A_1 и A_2 зависимы, поэтому

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2 / A_1) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}.$$

3.1.19. Тестовые задания по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей» для самостоятельного решения

1. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,1; второй – 0,15; третий – 0,2. Тогда вероятность того, что в течение часа потребует вмешательства наладчика только один станок, равна…

1) 0,329;

2) 0,1;

3) 0,45;

4) 0,003.

2. В электрическую цепь параллельно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов элементов равны соответственно 0,05, 0,1, 0,20. Тогда вероятность того, что тока в цепи не будет, равна…

1) 0,001;

2) 0,35;

3) 0,999;

4) 0,01.

3. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,15; второй – 0,25; третий – 0,2. Тогда вероятность того, что в течение часа потребует вмешательства наладчика хотя бы один станок, равна…

1) 0,49;

2) 0,51;

3) 0,6;

4) 0,25.

4. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров, добавляют два белых шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Тогда вероятность того, что все три шара будут белыми, равна…

1) $\frac{28}{143}$;

2) $\frac{3}{8}$;

3) $\frac{115}{143}$;

4) $\frac{4}{33}$.

5. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,95, а вторым – 0,80. Оба стрелка стреляют одновременно. Тогда вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком, равна…

1) 0,23;

2) 0,95;

3) 0,875;

4) 0,17.

Ответы: **1.** 1). **2.** 1). **3.** 1). **4.** 1). **5.** 1).

3.1.20. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти только с одним из n попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, образующих полную группу, т.е. $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, $H_i \cdot H_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда полная вероятность события A, учитывающая все предположения, равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i), \text{ где } \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Здесь события H_i – причины или гипотезы, а событие A – следствие, связанное с каждой из этих причин.

Пример. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1 : 4 : 5. Практика показала, что телевизоры не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98, 88 и 92 % случаев. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение. Обозначим событие $A = \{$телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока$\}$. Сформулируем гипотезы: $H_i = \{$телевизор поступил в торговую фирму от i-го поставщика $i = 1, 2, 3\}$.

По условию задачи

$$P(H_1)=\frac{1}{1+4+5}=\frac{1}{10},\quad P(H_2)=\frac{4}{1+4+5}=\frac{4}{10},$$

$$P(H_3)=\frac{5}{1+4+5}=\frac{5}{10}.$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=0{,}1+0{,}4+0{,}5=1.$

Условные вероятности: $P(A/H_1)=0{,}98$, $P(A/H_2)=0{,}88$, $P(A/H_3)=0{,}92$.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$

$$=0{,}1\cdot 0{,}98+0{,}4\cdot 0{,}88+0{,}5\cdot 0{,}92=0{,}91.$$

Формула Байеса

Пусть событие A уже произошло. Требуется количественно переоценить вероятности гипотез и выяснить, какая из них привела к реализации события A. В такой ситуации требуется подсчитать условные послеопытные (апостериорные) вероятности по формуле

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},\quad k=\overline{1,n}.$$

Пример. В условиях предыдущего примера проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

Решение. Событие $\overline{A}=\{$телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока$\}$, $P(\overline{A})=1-0{,}91=0{,}09$. По условию $P(\overline{A}/H_1)=1-0{,}98=0{,}02$, $P(\overline{A}/H_2)=1-0{,}88=0{,}12$, $P(\overline{A}/H_3)=1-0{,}92=0{,}08$.

Тогда по формуле Байеса

$$P(H_1/\overline{A})=\frac{P(H_1)P(\overline{A}/H_1)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}02}{0{,}09}=0{,}022,$$

$$P(H_2/\overline{A})=\frac{P(H_2)P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}12}{0{,}09}=0{,}533,$$

$$P(H_3/\overline{A})=\frac{P(H_3)P(\overline{A}/H_3)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}08}{0{,}09}=0{,}444.$$

Таким образом, после наступления события $\overline{A}$ вероятность гипотезы H_2 увеличилась с 0,4 до максимальной 0,533, а гипотезы H_3 уменьшилась от максимальной 0,5 до 0,444. Если ранее (до наступления события A) наиболее вероятной была гипотеза H_3, то теперь в свете новой информации (наступления события A), наиболее вероятна гипотеза H_2, т.е. вероятнее всего поступление данного телевизора от 2-го поставщика.

3.1.21. Примеры решения задач по теме «Формула полной вероятности. Формула Байеса»

1. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

Решение. Обозначим событие $A = \{$вторая игра будет проводиться новыми мячами$\}$. Сформулируем гипотезы:

H_1 = {для первой игры взяли 2 новых мяча},

H_2 = {для первой игры взяли 2 старых мяча},

H_3 = {для первой игры взяли 1 новый и 1 старый мячи}.

Найдем вероятности гипотез по классическому определению, для вычисления количества благоприятных и всевозможных исходов будем использовать сочетания, поскольку порядок мячей в выборке не имеет значения,

$$P(H_1) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{105}{190},\ P(H_2) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{190},\ P(H_3) = \frac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{75}{190}.$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Условные вероятности также найдем по классическому определению с использованием сочетаний:

$$P(A/H_1) = \frac{C_{13}^2}{190} = \frac{78}{190},\ P(A/H_2) = \frac{C_{15}^2}{190} = \frac{105}{190},\ P(A/H_3) = \frac{C_{14}^2}{190} = \frac{91}{190}.$$

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \frac{16065}{190^2} \approx 0{,}44.$$

2. Для проверки усвоения лекционного материала в студенческой группе был случайным образом выбран студент, и ему был предложен тест по теме лекции. В этой студенческой группе 6 отличников, 7 хороших студентов и 3 средних студента (по результатам прошедшей сессии). Было известно, что отличник справляется с тестом с вероятностью 0,85, хороший студент справляется с тестом с вероятностью 0,6, а средний студент справляется с тестом с вероятностью 0,3. Вычислить: а) априорную вероятность того, что был протестирован хороший студент; в) вероятность того, что студент не справился с тестом; с) вероятность того, что был выбран хороший студент, если известно, что студент с тестом не справился.

Решение.

а) Эту вероятность можно найти по классическому определению, разделив количество хороших студентов на общее количество студентов, получится $\frac{7}{16} = 0{,}4375$;

в) Обозначим событие $A = \{$студент не справился с тестом$\}$.

Сформулируем гипотезы:

H_1 = {выбран отличник},

H_2 = {выбран хороший студент},

H_3 = {выбран средний студент}.

Найдем вероятности гипотез: $P(H_1) = \frac{6}{16}$, $P(H_2) = \frac{7}{16}$, $P(H_3) = \frac{3}{16}$.

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Условные вероятности: $P(A/H_1) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$, $P(A/H_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $P(A/H_3) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = 0{,}3625.$$

с) Теперь нужно по формуле Байеса переоценить вероятность второй гипотезы:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4375 \cdot 0{,}4}{0{,}3625} = 0{,}482759.$$

3. В первой урне 2 белых и 6 черных шаров, во второй – 4 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар. а) Какова вероятность того, что этот шар белый? б) Шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара?

Решение.

а) Обозначим событие $A = \{$из второй урны достали белый шар$\}$.

Сформулируем гипотезы:

H_1 = {из первой урны во вторую переложили 2 белых},

H_2 = {из первой во вторую переложили 2 черных},

H_3 = {из первой во вторую переложили 1 белый и 1 черный}.

Найдем вероятности гипотез по классическому определению с использованием сочетаний

$$P(H_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28},\ P(H_2) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28},\ P(H_3) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}.$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Условные вероятности: $P(A/H_1) = \frac{6}{8}$, $P(A/H_2) = \frac{4}{8}$, $P(A/H_3) = \frac{5}{8}$.

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \frac{6 + 60 + 60}{28 \cdot 8} = 0{,}5625.$$

в) Теперь нужно по формуле Байеса переоценить вероятность первой гипотезы:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}0357142 \cdot 0{,}75}{0{,}5625} = 0{,}0476188.$$

4. Автомашина используется для подвозки товаров в три магазина. В первом магазине разгрузка выполняется в течение 30 минут с вероятностью 0,77, во втором – 0,67 и в третьем – 0,62. На базу сообщили, что машина разгружена за 30 минут. Определить вероятность того, что это произошло в первом магазине.

Решение. Обозначим событие $A = \{$машина разгружена за 30 минут$\}$.

Сформулируем гипотезы:

H_1 = {в первом магазине},

H_2 = {во втором магазине},

H_3 = {в третьем магазине}.

Вероятности гипотез равны, поскольку гипотезы равновозможны, то $P(H_1) = \frac{1}{3}$, $P(H_2) = \frac{1}{3}$, $P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Условные вероятности: $P(A/H_1) = 0{,}77$, $P(A/H_2) = 0{,}67$, $P(A/H_3) = 0{,}62$.

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = \frac{0{,}77 + 0{,}67 + 0{,}62}{3} \approx 0{,}69.$$

Теперь нужно по формуле Байеса переоценить вероятность первой гипотезы:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}33 \cdot 0{,}77}{0{,}69} = 0{,}37.$$

5. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5 : 8 : 7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90 %, второй – 85 %, третьей – 75 %. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?

Решение.

а) Обозначим событие $A = \{$приобретенное изделие окажется нестандартным$\}$. Сформулируем гипотезы:

H_1 = {изделие поставлено первой фирмой},

H_2 = {изделие поставлено второй фирмой},

H_3 = {изделие поставлено третьей фирмой}.

Найдем вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{5}{20},\ P(H_2) = \frac{8}{20},\ P(H_3) = \frac{7}{20}.$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Условные вероятности: $P(A/H_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P(A/H_2) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$, $P(A/H_3) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

По формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = \frac{5 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}15 + 7 \cdot 0{,}25}{20} = 0{,}1725.$$

б) Событие $\overline{A} = \{$ приобретенное изделие окажется стандартным$\}$, по следствию из теоремы сложения вероятностей, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}8275$. Теперь нужно по формуле Байеса переоценить вероятность третьей гипотезы:

$$P(H_3 / \overline{A}) = \frac{P(H_3)P(\overline{A} / H_3)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}75}{0{,}8275} = 0{,}32.$$

3.1.22. Задачи по теме «Формула полной вероятности. Формула Байеса» для самостоятельного решения

1. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,96, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Определить: а) какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия? б) какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку, бракованное?

2. В двух цехах производится однотипная продукция. Производительность первого цеха вдвое выше, чем производительность второго цеха. Изделия высшего качества составляют в среднем для первого цеха 95 %, для второго цеха – 90 %. Из общей продукции этих цехов наугад берется одно изделие. Найти вероятность того, что оно окажется изделием высшего качества. Какова вероятность того, что выбранное изделие изготовлено во втором цехе, если известно, что оно оказалось изделием высшего качества?

3. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

4. Легковых автомобилей у бензоколонки проезжает вчетверо больше, чем грузовых машин. Вероятность того, что проезжающая автомашина подъедет на заправку, составляет для грузовой машины 0,05, для легковой – 0,15. а) К месту, где расположена бензоколонка, приближается какая-то машина. Чему равна вероятность того, что она подъедет на заправку? б) Только что от бензоколонки отъехала заправленная машина. Какова вероятность того, что это был грузовик?

5. На предприятии 96 % выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Используемая схема контроля качества признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, признанное пригодным, действительно является таковым?

6. Студент знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случаи его шансы получить знакомый билет выше: когда он подходит первым или вторым по счету?

7. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,2, а у второго 0,6. В результате первого выстрела оказалось одно попадание. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

Ответы: **1.** а) 0,9428; б) 0,0021. **2.** $P(A)=\frac{14}{15}$, $P(H_2/A)=\frac{9}{28}$. **3.** 0,628. **4.** а) 0,13, б) $\frac{1}{13}$. **5.** 0,9979. **6.** одинаковы. **7.** $\frac{6}{7}$.

3.1.23. Решение тестовых заданий по теме «Формула полной вероятности. Формула Байеса»

1. Банк выдает 44 % всех кредитов юридическим лицам, а 56 % – физическим лицам. Вероятность того, что юридическое лицо не погасит в срок кредит, равна 0,2; а для физического лица эта вероятность составляет 0,1. Тогда вероятность того, что очередной кредит будет погашен в срок, равна…

1) 0,856;

2) 0,144;

3) 0,85;

4) 0,866.

Решение. Для вычисления вероятности события A = {выданный кредит будет погашен в срок} применим формулу полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2).$$

Здесь $P(H_1)$ – вероятность того, что кредит был выдан юридическому лицу; $P(H_2)$ – вероятность того, что кредит был выдан физическому лицу; $P(A/H_1)$ – условная вероятность того, что кредит будет погашен в срок, если он был выдан юридическому лицу; $P(A/H_2)$ – условная вероятность того, что кредит будет погашен в срок, если он был выдан физическому лицу.

Тогда по формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = \frac{44}{100} \cdot 0{,}8 + \frac{56}{100} \cdot 0{,}9 = 0{,}856.$$

2. Имеются три урны, содержащие по 5 белых и 5 черных шаров, и семь урн, содержащих по 6 белых и 4 черных шара. Из наудачу взятой урны вытаскивается один шар. Тогда вероятность того, что этот шар белый, равна…

1) 0,57;

2) 0,43;

3) 0,55;

4) 0,53.

Решение. Для вычисления вероятности события A = {вынутый наудачу шар – белый} применим формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Здесь $P(H_1)$ – вероятность того, что шар извлечен из первой серии урн; $P(H_2)$ – вероятность того, что шар извлечен из второй серии урн; $P(A/H_1)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если из он извлечен из первой серии урн; $P(A/H_2)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если из он извлечен из второй серии урн. Тогда по формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}57.$$

3. В первой урне 3 черных шара и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых шара и 6 черных. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался черным. Тогда вероятность того, что этот шар вынули из второй урны, равна…

1) $\frac{2}{3}$;

2) $\frac{1}{3}$;

3) $\frac{3}{5}$;

4) $\frac{3}{10}$.

Решение. Предварительно вычислим вероятность события A = {вынутый наудачу шар – черный} по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Здесь $P(H_1)$ – вероятность того, что шар извлечен из первой урны; $P(H_2)$ – вероятность того, что шар извлечен из второй урны; $P(A/H_1)$ – условная вероятность того, что вынутый шар черный, если он извлечен из первой урны; $P(A/H_2)$ – условная вероятность того, что вынутый шар черный, если он извлечен из второй урны.

Тогда $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}45.$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот шар был извлечен из второй урны, по формуле Байеса:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{0{,}45} = \frac{2}{3}.$$

4. Банк выдает 40 % всех кредитов юридическим лицам, а 60 % – физическим лицам. Вероятность того, что юридическое лицо не погасит в срок кредит, равна 0,1; а для физического лица эта вероятность составляет 0,05. Получено сообщение о невозврате кредита. Тогда вероятность того, что этот кредит не погасило физическое лицо, равна…

1) $\frac{3}{7}$;

2) $\frac{4}{7}$;

3) $\frac{7}{100}$;

4) $\frac{5}{100}$.

Решение. Предварительно вычислим вероятность события A = {выданный кредит не будет погашен в срок} по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Здесь $P(H_1)$ – вероятность того, что кредит был выдан юридическому лицу; $P(H_2)$ – вероятность того, что кредит был выдан физическому лицу; $P(A/H_1)$ – условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан юридическому лицу; $P(A/H_2)$ – условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан физическому лицу.

Тогда $P(A) = \frac{40}{100} \cdot 0{,}1 + \frac{60}{100} \cdot 0{,}05 = 0{,}07.$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот кредит не погасило физическое лицо, по формуле Байеса:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}05}{0{,}07} = \frac{3}{7}.$$

5. В первой урне 6 черных шаров и 4 белых шара. Во второй урне 2 белых и 8 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался белым. Тогда вероятность того, что этот шар вынули из первой урны, равна…

1) $\frac{2}{3}$;

2) $\frac{1}{3}$;

3) $\frac{1}{5}$;

4) $\frac{2}{5}$.

Решение. Предварительно вычислим вероятность события A = {вынутый наудачу шар – белый} по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Здесь $P(H_1)$ – вероятность того, что шар извлечен из первой урны; $P(H_2)$ – вероятность того, что шар извлечен из второй урны; $P(A/H_1)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если он извлечен из первой урны; $P(A/H_2)$ – условная вероятность того, что вынутый шар белый, если он извлечен из второй урны.

Тогда $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}3.$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот шар был извлечен из первой урны, по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}3} = \frac{2}{3}.$$

6. Банк выдает 35 % всех кредитов юридическим лицам, а 65 % – физическим лицам. Вероятность того, что юридическое лицо не погасит в срок кредит, равна 0,15; а для физического лица эта вероятность составляет 0,1. Тогда вероятность непогашения в срок очередного кредита равна…

1) 0,1175;

2) 0,125;

3) 0,8825;

4) 0,1275.

7. Имеются четыре урны, содержащие по 3 белых и 7 черных шаров, и шесть урн, содержащих по 8 белых и 2 черных шара. Из наудачу взятой урны вытаскивается один шар, который оказался белым. Тогда вероятность того, что этот шар был вынут из первой серии урн, равна…

1) 0,20;

2) 0,80;

3) 0,72;

4) 0,40.

8. В первой урне 3 черных шара и 7 белых. Во второй урне 4 белых шара и 5 черных. Из первой урны переложили один шар во вторую урну. Тогда вероятность того, что шар, вынутый наудачу из второй урны, будет белым, равна…

1) 0,47;

2) 0,55;

3) 0,35;

4) 0,50.

9. В первой урне 5 черных и 6 белых шаров. Во второй урне 3 белых шара и 6 черных шаров. Из первой урны переложили один шар во вторую урну. Тогда вероятность того, что шар, вынутый наудачу из второй урны, будет черным, равна…

1) $\frac{71}{110}$;

2) $\frac{39}{110}$;

3) $\frac{35}{110}$;

4) $\frac{36}{110}$.

10. Банк выдает 70 % всех кредитов юридическим лицам, а 30 % – физическим лицам. Вероятность того, что юридическое лицо не погасит в срок кредит, равна 0,15; а для физического лица эта вероятность составляет 0,05. Получено сообщение о невозврате кредита. Тогда вероятность того, что этот кредит не погасило юридическое лицо, равна…

1) 0,875;

2) 0,125;

3) 0,105;

4) 0,375.

Ответы: **6.** 1). **7.** 1). **8.** 1). **9.** 1). **10.** 1).

3.1.24. Схема последовательных независимых испытаний. Формула Бернулли

Пусть проводятся последовательные независимые испытания, в каждом из которых может произойти событие $A=\{\text{успех}\}$ или $\overline{A}=\{\text{неуспех}\}$. Пусть $P(A)=p,\ \ P(\overline{A})=1-p=q$. Такая последовательность испытаний называется схемой Бернулли. Вероятность того, что в n испытаниях событие $A=\{\text{успех}\}$ произойдет ровно m раз, обозначается $P_n(m)$ и определяется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = \overline{0,n}.$$

Так как исходы испытаний составляют полную группу событий, то $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$.

Наивероятнейшим числом m_0 появления события A в n испытаниях называется число, для которого вероятность $P_n(m_0)$ не меньше вероятностей других испытаний.

Наивероятнейшее значение $m_0 = [np + p]$, где [] – целая часть числа, если $np + p -$ нецелое число, если $np + p -$ целое число, то наибольшее значение вероятности достигается при двух числах $m_0' = np + p$ и $m_0'' = np + p - 1$.

Также наивероятнейшее число испытаний можно найти из неравенства $np - q \le m_0 \le np + p$.

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность того, что среди 5 отобранных деталей окажется 3 бракованных.

Решение. Событие $A = \{$изготовление бракованной детали$\}$, $\overline{A} = \{$изготовление стандартной детали$\}$, $P(A) = p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q = 0{,}8$. Количество испытаний n = 5, m = 3. Тогда по формуле Бернулли получим: $P_5(3) = C_5^3 0{,}2^3 0{,}8^2 = 0{,}0512$.

Пример. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10.

Решение. Событие $A = \{$выпадение 3$\}$, $\overline{A} = \{$выпадение числа, не равного 3$\}$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. Количество испытаний $n -$ неизвестно, $m_0 = 3$. Согласно неравенству $n\frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 10 \le n\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ или $n - 5 \le 60 \le n + 1$, откуда $59 \le n \le 65$, т.е. кость необходимо подбросить от 59 до 65 раз включительно.

3.1.25. Примеры решения задач по теме «Схема последовательных независимых испытаний. Формула Бернулли»

1. Бросают 5 игральных костей. Чему равна вероятность того, что из пяти выпавших цифр одна – четная, а остальные – нечетные?

Решение. Событие $A = \{$выпадет четная цифра$\}$, $\overline{A} = \{$выпадет нечетная цифра$\}$, $P(A) = p = \frac{1}{2}$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q = \frac{1}{2}$. Количество испытаний n=5, m=1. Тогда по формуле Бернулли получим:

$$P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}.$$

2. Вероятность появления успеха равна 3/5. Найти наивероятнейшее число наступлений успеха, если число испытаний равно 19.

Решение. Событие $A = \{\text{успех}\}$, $\overline{A} = \{\text{неуспех}\}$, $p = \dfrac{3}{5}$, $q = \dfrac{2}{5}$.

Количество испытаний $n = 19$, необходимо найти m_0.

Согласно неравенству $np - q \le m_0 \le np + p$ имеем $19 \cdot \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5} \le m_0 \le 19 \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}$, откуда $11 \le m_0 \le 12$, т.е. $m_0' = 11$, $m_0'' = 12$.

3. В среднем 20 % пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов, б) не более 2 пакетов, в) хотя бы 2 пакета, г) наивероятнейшее число пакетов.

Решение.

1) Событие $A = \{\text{пакеты не проданы по первоначально заявленной цене}\}$, $p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Количество испытаний $n = 9$, $m = 5$. Тогда по формуле Бернулли получим: $P_9(5) = C_9^5 (0{,}8)^5 (0{,}2)^4 = 0{,}066$;

2) Событие $A = \{\text{пакеты проданы по первоначально заявленной цене}\}$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$.

а) количество испытаний $n = 9$, $m < 2$ Тогда $P_9(m < 2) = P_9(0) + P_9(1) = C_9^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^9 + C_9^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^8 = 0{,}436$;

б) количество испытаний $n = 9$, $m \le 2$. Тогда $P_9(m \le 2) = P_9(0) + P_9(1) + P_9(2) = C_9^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^9 + C_9^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^8 + C_9^2 (0{,}2)^2 (0{,}8)^7 = 0{,}738$;

в) количество испытаний $n = 9$, $m \ge 2$. Тогда $P_9(m \ge 2) = P_9(2) + \cdots + P_9(9) = 1 - P_9(m < 2) = 1 - 0{,}436 = 0{,}564$;

г) согласно неравенству $np - q \le m_0 \le np + p$ или $9 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le m_0 \le 9 \cdot 0{,}2 + 0{,}2$, откуда $1 \le m_0 \le 2$, т.е. $m_0' = 1$, $m_0'' = 2$. Вероятность наивероятнейшего числа пакетов $P_9(1) + P_9(2) = 0{,}604$.

3.1.26. Задачи по теме «Схема последовательных независимых испытаний. Формула Бернулли» для самостоятельного решения

1. Найти наивероятнейшее число наступления ясных дней в течение первой декады сентября, если из многолетних наблюдений известно, что в сентябре в среднем бывает 11 ненастных дней.

2. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 10 новорожденных 4 девочки.

3. Сколько следует сыграть партий в шахматы с вероятностью победы в одной партии, равной 1/3, чтобы наивероятнейшее число побед было равно 5?

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

5. Какова вероятность того, что при бросании семи игральных костей шестерка выпадет трижды?

6. Перерасход горючего в течение рабочего дня наблюдается в среднем по парку у 20 % машин. Найдите вероятность того, что из десяти вышедших на линию машин перерасход горючего произойдет не менее чем у трех машин.

7. Вероятность попадания стрелка в десятку равна 0,7, в девятку – 0,3. Чему равна вероятность того, что при трех выстрелах стрелок наберет не менее 29 очков?

Ответы: **1**. 6. **2**. 0,217. **3**. 15-17. **4**. 0,28. **5**. 0,078. **6**. 0,32. **7**. 0,784.

3.2. Случайные величины

Переменная величина называется *случайной*, если под влиянием ряда случайных причин она в общем случае с различными вероятностями способна принимать различные числовые значения. Случайные величины обозначают заглавными латинскими буквами $X, Y, Z, \ldots$, а их значения – соответствующими строчными буквами $x, y, z, \ldots$ Множество значений, которые способна принимать случайная величина, называется *спектром*. В зависимости от спектра случайные величины разделяют на дискретные и непрерывные.

3.2.1. Дискретные случайные величины

Случайная величина *дискретного* типа, если ее спектр содержит конечное или счетное множество чисел. То есть значения величины можно занумеровать, и эти значения изолированы друг от друга. Дискретная случайная величина X может быть задана рядом распределения или функцией распределения.

Ряд распределения может быть задан в виде таблицы, где x_i – возможные значения случайной величины, p_i – соответствующие вероятности, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	………..	x_n
p_i	p_1	p_2	…………	p_n

Функция распределения определяется равенством $F(x) = P\{X < x\}$, для дискретной случайной величины определяется по формуле $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$. В аналитической форме функция распределения имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ p_1, & x_1 < x < x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x < x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Кроме ряда распределения и функции распределения информацию о случайной величине несут числовые характеристики. К числовым характеристикам относятся: математическое ожидание, мода, диспепсия, среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины называется сумма произведений значений на соответствующие вероятности

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \, .$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $M(C) = C,$ где $C - const$.
2. $M(CX) = C \cdot MX,$ где $C - const$.
3. $M(X \pm Y) = MX \pm MY,$ где $X, Y -$ случайные величины.

Две случайные величины называются взаимно *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины – *зависимые*.

4. $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY,$ где $X, Y -$ независимые случайные величины.

Мода дискретной случайной величины определяется как наиболее вероятное значение $P\{X = x_{\text{mod}}\} = \max_i P\{X = x_i\}$.

Дисперсия случайной величины определяет меру разброса или рассеяния значений вокруг среднего $DX = MX^2 - (MX)^2$. Для дискретной случайной величины с конечным спектром дисперсия определяется по формуле

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (MX)^2.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(C) = 0,$ где $C - const$.
2. $D(CX) = C^2 \cdot DX,$ где $C - const$.
3. $D(X \pm Y) = DX + DY,$ где $X, Y -$ независимые случайные величины.

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) называют число $\sigma X = \sqrt{DX}$, имеющее размерность самой величины X.

Пример. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен по дисциплинам А и В, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения и найти математическое ожидание числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Решение. Случайная величина $X -$ число семестровых экзаменов, которые сдаст студент. Возможные значения случайной величины $X - 0, 1, 2$. Определим вероятности каждого значения (для вычисления вероятностей используется теорема сложения и умножения вероятностей):

$p_1 = P\{X = 0\} = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03,$

$p_2 = P\{X = 1\} = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}34,$

$p_3 = P\{X = 2\} = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$

Итак, ряд распределения имеет следующий вид:

X :

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

Контроль: 0,03 + 0,34 + 0,63 = 1.

Найдем математическое ожидание случайной величины X: $MX = 0 \cdot 0{,}03 + 1 \cdot 0{,}34 + 2 \cdot 0{,}63 = 1{,}6$ – среднее число экзаменов.

3.2.2. Примеры решения задач по теме «Дискретные случайные величины»

1. На новогодней елке погасла гирлянда, состоящая из 15 лампочек. Для отыскания перегоревшей лапочки проверяются по очереди все лампочки гирлянды. Сколько в среднем лампочек придется проверить, чтобы обнаружить перегоревшую лампочку? Какова вероятность того, что для обнаружения перегоревшей лампочки придется проверить не менее половины всех лампочек?

Решение. Случайная величина X – число проверяемых лампочек. Возможные значения случайной величины X – 1, 2, ..., 15. Так как все лампочки одинаковы, то вероятности перегореть у них одинаковые, т.е.

$$p_1 = P\{X = 1\} = \frac{1}{15},\ p_2 = P\{X = 2\} = \frac{1}{15}, \ldots.. p_{15} = P\{X = 15\} = \frac{1}{15}.$$

Итак, ряд распределения имеет следующий вид:

X :

x_i	1	……..	15
p_i	$\frac{1}{15}$	………	$\frac{1}{15}$

Найдем математическое ожидание: $MX = \frac{1}{15}(1 + 2 + 3 + \cdots + 15) = \frac{120}{15} = 8$– среднее количество проверяемых лампочек.

Вероятность того, что придется проверить не менее половины вех лампочек:

$$P\{X \geq 8\} = \sum_{m=8}^{15} P\{X = m\} = \underbrace{\frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{15}}_{8\ раз} = \frac{8}{15}.$$

2. Трое студентов сдают экзамен по математике на отлично (независимо друг от друга) с вероятностями 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Пусть X – общее число полученных ими отличных оценок. Вычислить MX и DX.

Решение. Случайная величина X – общее число полученных отличных оценок. Возможные значения случайной величины X – 0, 1, 2, 3. Определим вероятности каждого значения по теореме умножения и сложения вероятностей:

$p_1 = P\{X = 0\} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$,

$p_2 = P\{X = 1\} = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}092$,

$p_3 = P\{X = 2\} = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}398$,

$p_4 = P\{X = 3\} = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$

Итак, ряд распределения имеет следующий вид:

X :

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Контроль: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1.

Найдем математическое ожидание:

$$MX = 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4,$$

дисперсию:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (MX)^2 = 1 \cdot 0{,}092 + 4 \cdot 0{,}398 + 9 \cdot 0{,}504 - (2{,}4)^2 = 0{,}46.$$

3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	–4	3	4	5	8
p_i	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4

Решение. Для того чтобы определить дисперсию, нужно знать математическое ожидание.

Найдем математическое ожидание:

$$MX = -4 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}4 = 4,$$

дисперсию:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (MX)^2 = 16 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}1 + 64 \cdot 0{,}4 - 4^2 = 19{,}4,$$

среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{19{,}4} = 4{,}404.$$

4. Математическое ожидание случайной величины X равно 4. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 2X - 9$.

Решение. Для решения этой задачи используем свойства математического ожидания, т.е. $MZ = M(2X - 9) = 2 \cdot MX - M(9) = 2 \cdot 4 - 9 = -1$.

5. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X – число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Случайная величина X – число извлеченных белых шаров. Возможные значения случайной величины X – 0, 1, 2, 3, 4, 5. Определим вероятности каждого значения по формуле Бернулли, поскольку здесь работает схема последовательных независимых испытаний, когда $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $n = 5$, $m = \overline{0{,}5}$:

$$p_1 = P\{X = 0\} = C_5^0 (0{,}6)^0 (0{,}4)^5 = 0{,}01024,$$
$$p_2 = P\{X = 1\} = C_5^1 (0{,}6)^1 (0{,}4)^4 = 0{,}0768,$$
$$p_3 = P\{X = 2\} = C_5^2 (0{,}6)^2 (0{,}4)^3 = 0{,}2304,$$
$$p_4 = P\{X = 3\} = C_5^3 (0{,}6)^3 (0{,}4)^2 = 0{,}3456,$$
$$p_5 = P\{X = 4\} = C_5^4 (0{,}6)^4 (0{,}4)^1 = 0{,}2592,$$
$$p_6 = P\{X = 5\} = C_5^5 (0{,}6)^5 (0{,}4)^0 = 0{,}07776.$$

Итак, ряд распределения величины X имеет следующий вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

Контроль: 0,011024 + 0,0768 + 0,2304 + 0,3456 + 0,2592 + 0,07776 = 1.

Найдем математическое ожидание: $MX = 1 \cdot 0{,}0768 + 2 \cdot 0{,}2304 + 3 \cdot 0{,}3456 + 4 \cdot 0{,}2592 + 5 \cdot 0{,}07776 = 3$, дисперсию: $DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (MX)^2 = 1 \cdot 0{,}0768 + 4 \cdot 0{,}2304 + 9 \cdot 0{,}3456 + 16 \cdot 0{,}2592 + 25 \cdot 0{,}07776 - (3)^2 = 1{,}2$.

3.2.3. Задачи по теме «Дискретные случайные величины» для самостоятельного решения

1. Из колоды карт (52 листа) наугад без возвращения достают по одной карте до тех пор, пока не попадется дама пик. Сколько в среднем карт придется извлечь из колоды? Какова вероятность того, что доставать потребуется более половины всех карт?

2. Три стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5; вторым – 0,4; третьим – 0.7. Составить закон распределения числа попаданий в мишень. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

3. В связке из 3 ключей только один ключ подходит к двери. Ключи перебирают до тех пор, пока не отыщется подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины X – числа перепробованных ключей.

4. Пусть случайная величина X имеет следующий закон распределения:

x_i	–1	0	2
p_i	1/4	1/4	1/2

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

5. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3 - 2X$.

6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	1	3
p_i	0,2	0,8

Найти ее среднее квадратическое отклонение.

7. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	–2	4	7
p_i	0,1	0,5	0,4

Найти ее математическое ожидание.

8. Математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения вероятностей:

x_i	3	5
p_i	p_1	p_2

равно 4,4. Найти вероятность p_2.

9. Дисперсия дискретной случайной величины X, заданной законом распределения вероятностей:

x_i	1	x_2
p_i	0,4	0,6

равна 0,06. Найти значение $x_2 > 1$.

10. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	–1	5
p_i	0,3	0,7

Ответы: **1.** $\frac{53}{2}$; $\frac{1}{2}$. **2.** $MX = 1{,}6$, $DX = 0{,}7$. **3.**

x_i	1	2	3
p_i	1/3	1/3	1/3

4. $MX = 1/4$, $DX = 19/16, \sigma X = \sqrt{19}/4$. **5.** 20. **6.** 0,8. **7**. 4,6. **8.** 0,7. **9**. 1,5. **10**. 7,56.

3.2.4. Решение тестовых заданий по теме «Дискретные случайные величины»

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	1	4	6
p_i	0,25	0,2	0,55

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид

1) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}25 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}45 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}25 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}45 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 0 \text{ при } x>6.\end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}25 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 0{,}20 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases}0{,}25 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}45 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 1 \text{ при } 4<x\le 6,\\ 0 \text{ при } x>6.\end{cases}$

Решение. Функция распределения определяется по формуле

$$F(x)=P\{X<x\} = \sum_{x_i<x} p_i .$$

Тогда

а) при $x\le 1$, $F(x)=P\{X<1)=0$,

б) при $1<x\le 4$, $F(x)=P\{X=1\}=0{,}25$,

в) при $4<x\le 6$, $F(x)=P\{X=1\}+P\{X=4\}=0{,}25+0{,}2=0{,}45$,

г) при $x>6$, $F(x)=P\{X=1\}+P\{X=4\}+P\{X=6\}=0{,}25+0{,}2+0{,}55=1$.

Следовательно, $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}25, & 1 < x \le 4, \\ 0{,}45, & 4 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$

2. Дискретная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } & x \le 1, \\ 0{,}14 \text{ при } & 1 < x \le 2, \\ 0{,}30 \text{ при } & 2 < x \le 3, \\ 0{,}68 \text{ при } & 3 < x \le 5, \\ 1 \text{ при } & x > 5. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P\{2 \le X < 5\}$ равна:

1) 0,54;
2) 0,38;
3) 0,70;
4) 0,86.

Решение. Так как по определению

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i ,$$

то случайную величину X можно задать законом распределения вероятностей следующего вида:

x_i	1	2	3	5
p_i	0,14	0,16	0,38	0,32

Следовательно, $P\{2 \le X < 5\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 0{,}16 + 0{,}38 = 0{,}54.$

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,15	a	b	0,1	0,2

Тогда значения a и b могут быть равны:

1) $a = 0{,}35,\quad b = 0{,}2$;
2) $a = 0{,}25,\quad b = 0{,}2$;
3) $a = 0{,}35,\quad b = 0{,}15$;
4) $a = 0{,}35,\quad b = 0{,}3$.

Решение. Так как сумма вероятностей возможных значений X равна 1, то $a+b=1-0{,}15-0{,}1-0{,}2=0{,}55$. Этому условию удовлетворяет ответ $a=0{,}35,\quad b=0{,}2.$

4. Для дискретной случайной величины X

x_i	2	3	4	5
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}2 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0{,}55 \text{ при } 3<x\le 4,\\ p \text{ при } 4<x\le 5,\\ 1 \text{ при } x>5.\end{cases}$$

Тогда значение параметра p может быть равно:

1) 0,655;

2) 1;

3) 0,25;

4) 0,45.

Решение. По определению

$$F(x)=P\{X<x\}=\sum_{x_i<x} p_i .$$

Следовательно, $p\ge 0{,}55$ и $p\le 1$. Этим условиям удовлетворяет, например, значение $p=0{,}655$.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	–2	4	7
p_i	0,1	0,5	0,4

Тогда ее математическое ожидание равно:

1) 4,6;

2) 5,0;

3) 3,0;

4) 4,9

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле $MX=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Тогда $MX=-2\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}55+7\cdot 0{,}4=4{,}6.$

3.2.5. Тестовые задания по теме «Дискретные случайные величины» для самостоятельного решения

1. Банк выдал пять кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,1. Тогда вероятность того, что в срок не будут погашены три кредита, равна…

1) 0,0081;

2) 0,081;

3) 0,06;

4) 0,0729.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид

1) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}4 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}7 \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}8 \text{ при } 3 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}4 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}7 \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}8 \text{ при } 3 < x \le 4, \\ 0 \text{ при } x > 4. \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}4 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}3 \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}1 \text{ при } 3 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases} 0{,}4 \text{ при } x\le 1, \\ 0{,}7 \text{ при } 1<x\le 2, \\ 0{,}8 \text{ при } 2<x\le 3, \\ 1 \text{ при } 3<x\le 4, \\ 0 \text{ при } x>4. \end{cases}$

3. Для дискретной случайной величины X

x_i	1	4	8	9
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, \\ 0{,}65 \text{ при } 1<x\le 4, \\ p \text{ при } 4<x\le 8, \\ 0{,}85 \text{ при } 8<x\le 9, \\ 1 \text{ при } x>9. \end{cases}$$

Тогда значение параметра p может быть равно…

1) 0,7;

2) 1;

3) 0,85;

4) 0,6.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	–1	3	6	7	8
p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

Тогда вероятность $P\{3\le X\le 7\}$ равна…

1) 0,8;

2) 0,3;

3) 0,7;

4) 0,4.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

x_i	1	2	4	6
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Тогда вероятность $P\{1 < X \le 4\}$ равна…

1) 0,5;

2) 0,8;

3) 0,7;

4) 0,1.

Ответы: **1.** 1). **2.** 1). **3.** 1). **4.** 1). **5.** 1).

3.2.6. Непрерывные случайные величины

Случайная величина *непрерывного* типа, если ее спектр есть промежуток на числовой оси, или вся числовая ось. Непрерывная случайная величина X может быть задана *функцией плотности вероятности* $f(x) = F'(x)$ или функцией распределения $F(x) = P\{X < x\}$.

Функции $f(x)$ и $F(x)$ обладают следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
5. $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$.
6. $f(x) \ge 0$.
7. $P\{\alpha < X < \beta\} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$.

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ основные числовые характеристики определяются по формулам

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx,\ DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2.$$

Мода непрерывной случайной величины определяется из соотношения $f(x_{\mathrm{mod}}) = \max\limits_{x} f(x)$.

Квантилью уровня p непрерывной случайной величины X называется такое ее значение x_p, для которого $F(x_p) = p$.

Медианой называется такое значение x_{med} непрерывной случайной величины X, для которого $P(X < x_{med}) = 0{,}5$. Очевидно, что медиана есть квантиль уровня 0,5.

Пример. Случайная величина X распределена по закону с плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} C\left(1-\dfrac{x}{4}\right), 0<x\le 4 \\ 0, \quad x\le 0,\, x>4 \end{cases}.$$

Найти:

1) значение параметра C;

2) функцию распределения $F(x)$;

3) MX, DX, x_{med};

4) $P\{1<X<3\}$.

Решение.

1) Для определения параметра C воспользуемся свойством (4) функции плотности вероятности: $\int\limits_0^4 C\left(1-\dfrac{x}{4}\right)dx=1, \quad \Rightarrow \quad C\int\limits_0^4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)dx=1, \quad \Rightarrow$

$$C=\frac{1}{\int\limits_0^4 dx-\frac{1}{4}\int\limits_0^4 xdx}=\frac{1}{x\big|_0^4-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_0^4}=\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2}.$$

2) Используя свойство (5), найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x\le 0$, то $F(x)=0$.

Если $0<x\le 4$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^0 0dx+\int\limits_0^x \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}$.

Если $x>4$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^0 0dx+\int\limits_0^4 \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)dx+\int\limits_4^x 0dx=1$.

Таким образом, $F(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 0 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{16}, 0<x\le 4 \\ 1, \quad x>4 \end{cases}.$

3) Найдем числовые характеристики:

$$MX=\int\limits_0^4 x\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^4=\frac{4}{3},$$

$$DX=\int\limits_0^4 x^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\left(x^2-\frac{x^3}{4}\right)dx-\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{16}\right)\Bigg|_0^4-\frac{16}{9}=\frac{8}{9},$$

медиану определим как квантиль уровня 0,5, т.е. как корень уравнения $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}=\frac{1}{2}$, принадлежащий отрезку $[0;4]$, $x_{med}=4-2\sqrt{2}\approx 1{,}17$.

4) $P\{1 < X < 3\} = F(3) - F(1) = \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{16}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}.$

3.2.7. Примеры решения задач по теме «Непрерывные случайные величины»

1. Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ Cx^2, & x \in [0,2] \end{cases}.$$

Определить константу C, построить функцию распределения и вычислить вероятность $P\{-1 \le X \le 1\}$.

Решение. Для определения параметра C воспользуемся свойством (4) функции плотности вероятности:

$$\int_0^2 Cx^2 dx = 1, \Rightarrow C\int_0^2 x^2 dx = 1, \Rightarrow C = \frac{1}{\int_0^2 x^2 dx} = \frac{1}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}.$$

Используя свойство (5), найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $x \le 0$, то $F(x) = 0$.

Если $0 < x \le 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{x^3}{8}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx + \int_2^x 0dx = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Вероятность $P\{-1 \le X \le 1\} = F(1) - F(-1) = 1/8$.

2. Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ \frac{3x^2}{8}, & x \in [0,2] \end{cases}.$$

Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Найдем числовые характеристики:

$$MX = \int_0^2 x\frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{3}{2},$$

$$DX=\int_0^2 x^2\frac{3}{8}x^2dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}.$$

3. При каком значении C функция $f(x)=\dfrac{C}{1+x^2}$, $-\infty<x<+\infty$ является плотностью вероятности некоторой случайной величины? Что можно сказать о математическом ожидании этой случайной величины?

Решение. Для определения параметра C воспользуемся свойством (4) функции плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+x^2}dx=1,\ \Rightarrow\ C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=1,\ \Rightarrow C=\frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}}=\frac{1}{arctg\, x\Big|_{-\infty}^{+\infty}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}.$$

Найдем математическое ожидание:

$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2\pi}\ln\left|1+x^2\right|\Big\|_{-\infty}^{+\infty}=+\infty\Rightarrow$ математического ожидания для этой величины не существует. Данное распределение – это распределение Коши.

4. Функция распределения случайной величины X имеет вид

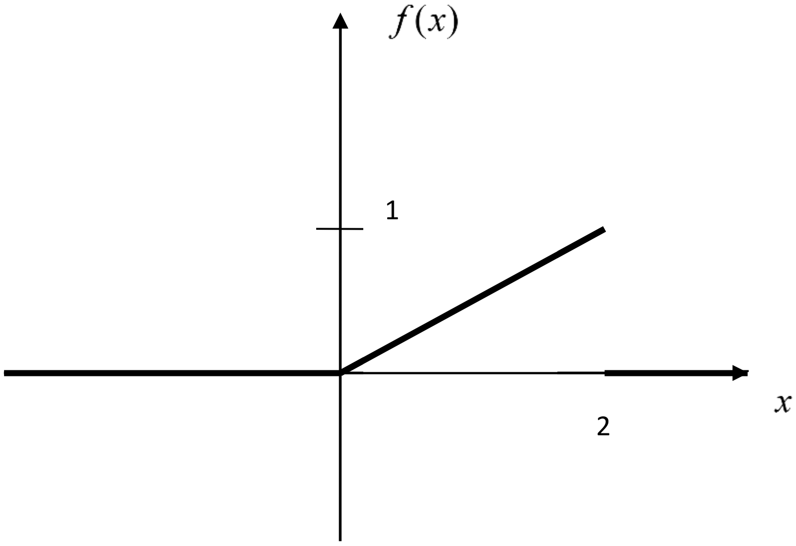
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}.$$

Построить кривую распределения. Определить $MX, x_{\text{mod}}, x_{med}$. Вычислить вероятность $P\{0{,}5<X\le 1{,}5\}$.

Решение. Кривая распределения – это график функции плотности вероятности. Для того чтобы ее найти, воспользуемся свойством $f(x)=F'(x)$, т.е.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

График функции плотности вероятности имеет вид



Найдем числовые характеристики:

$$MX = \int_0^2 x\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3},$$

Моду можно определить по графику – это точка, в которой функция плотности вероятности достигает максимального значения, т.е. $x_{\text{mod}} = 2$.

Медиану определим как квантиль уровня 0,5, т.е. как корень уравнения $\frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}$, принадлежащий отрезку $[0;2]$, $x_{med} = \sqrt{2}$.

Вероятность

$$P\{0{,}5 < X \le 1{,}5\} = F(1{,}5) - F(0{,}5) = \frac{(1{,}5)^2}{4} - \frac{(0{,}5)^2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. Налоговые органы обычно интересуются распределением годовых доходов тех лиц, годовой доход которых превосходит некоторый предел x_0, установленный законами налогообложения. Это и некоторые аналогичные распределения иногда считаются приближенно совпадающими с распределением Парето, заданным соотношением $P\{X > x\} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$, $x > x_0$, $\alpha > 0$, X – уровень годового дохода. Найти функцию распределения, медиану и математическое ожидание величины X. Вычислить вероятность событий: $A = \{x_{med} \le X < MX\}$, $B = \{|X - MX| < \sigma X\}$ при $\alpha = 4, x_0 = 1000$.

Решение. Найдем функцию распределения:

$$F(x) = P\{X < x\} = 1 - P\{X > x\} = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, x > x_0, \alpha > 0.$$

Медиану определим как квантиль уровня 0,5, т.е. как корень уравнения $1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}=\frac{1}{2}$, принадлежащий отрезку $[x_0;+\infty]$, $x_{med}=2^{\frac{1}{\alpha}}x_0$.

Для определения математического ожидания нам понадобится функция плотности вероятности:

$$f(x)=F'(x)=\frac{\alpha(x_0)^{\alpha}}{x^{\alpha+1}},\, x>x_0,\, \alpha>0.$$

Найдем математическое ожидание:

$$MX=\int\limits_{x_0}^{+\infty}x\frac{\alpha(x_0)^{\alpha}dx}{x^{\alpha+1}}=\frac{\alpha(x_0)^{\alpha}}{1-\alpha}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x_0}^{+\infty}=\frac{\alpha x_0}{\alpha-1},\, \alpha>1,$$

дисперсию:

$$DX=\int\limits_{x_0}^{+\infty}x^2\frac{\alpha(x_0)^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}dx-\left(\frac{\alpha x_0}{\alpha-1}\right)^2=\frac{\alpha(x_0)^2}{\alpha-2}-\left(\frac{\alpha x_0}{\alpha-1}\right)^2,$$

среднее квадратическое отклонение при $\alpha=4, x_0=1000$ равно $\sigma X=\sqrt{DX}=\frac{\sqrt{2}}{3}1000.$

Вычислим вероятности событий:

$$P(A)=P\{x_{med}\le X<MX\}=P\left\{2^{\frac{1}{4}}\cdot1000\le X\le\frac{4\cdot1000}{3}\right\}=$$

$$=F\left(\frac{4000}{3}\right)-F\left(2^{\frac{1}{\alpha}}\cdot1000\right)=1-\left(\frac{1000}{\frac{4000}{3}}\right)^4-1+\left(\frac{1000}{2^{\frac{1}{4}}\cdot1000}\right)^4\approx0{,}1836,$$

$$P(B)=P\{|X-MX|<\sigma X\}=P\{-\sigma X+MX<X<\sigma X+MX\}=$$

$$=P\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}1000+\frac{4\cdot1000}{3}<X<\frac{\sqrt{2}}{3}1000+\frac{4\cdot1000}{3}\right\}=P\left\{\frac{4-\sqrt{2}}{3}1000<X<\frac{4+\sqrt{2}}{3}1000\right\}=$$

$$=F\left(\frac{4+\sqrt{2}}{3}1000\right)-F\left(\frac{4-\sqrt{2}}{3}1000\right)\approx0{,}9057.$$

3.2.8. Задачи по теме «Непрерывные случайные величины» для самостоятельного решения

1. Функция распределения случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a+b\arcsin x, & -1\le x\le 1.\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

Определить параметры a и b, MX, DX, x_{med}.

2. Случайная величина X имеет плотность $f(x)=\dfrac{a}{e^{-x}+e^{x}}$, $-\infty<x<+\infty$. Найти значение параметра a и вероятность того, что в двух независимых наблюдениях X примет значения, меньшие 1.

3. Случайная величина X имеет плотность

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a\,x, & 0<x\le 2.\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Найти значение параметра a, DX и вероятность того, что отклонение X от ее математического ожидания будет не более 0,5.

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{2x}{9}, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей.

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{3x^2}{125} & \text{при } 0<x\le 5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Найти вероятность $P\{2<X<5{,}5\}$.

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ Cx^3 & \text{при } 0<x\le 6,\\ 0 & \text{при } x>6.\end{cases}$$

Найти значение параметра C.

7. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при } 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при } x>5. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей.

8. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{3x^2}{125} & \text{при } 0<x\le 5,\\ 0 & \text{при } x>5. \end{cases}$$

Найти вероятность $P\{-1<X<3\}$.

Ответы:

1. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{\pi}$, $MX=0, DX=\dfrac{1}{2}, x_{med}=0$.

2. $a=\dfrac{2}{\pi}, [F(1)]^2=\dfrac{4}{\pi^2}arctg^2 e$.

3. $a=\dfrac{1}{2}$, $MX=\dfrac{4}{3}, DX=\dfrac{2}{9}, P\{|X-MX|\le 0{,}5\}=\dfrac{2}{3}$.

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3. \end{cases}$

5. $\dfrac{117}{125}$.

6. $\dfrac{1}{324}$.

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{2x}{25}, & 0<x\le 5,\\ 0, & x>5. \end{cases}$

8. $\dfrac{27}{125}$.

3.2.9. Решение тестовых заданий по теме «Непрерывные случайные величины»

1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при } 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P\{-1<X<4\}$ равна…

1) $\frac{16}{25}$;

2) $\frac{17}{25}$;

3) $\frac{3}{5}$;

4) $\frac{9}{25}$.

Решение. Воспользуемся формулой $P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$.

Тогда $P\{-1<X<4\}=F(4)-F(-1)=\frac{16}{25}-0=\frac{16}{25}$.

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{3x^2}{125} & \text{при } 0<x\le 5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P\{1<X<4\}$ равна…

1) $\frac{63}{125}$;

2) $\frac{3}{5}$;

3) $\frac{13}{25}$;

4) $\frac{9}{125}$.

Решение. Воспользуемся формулой $P\{x_1<X<x_2\}=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Тогда $P\{1 < X < 4\} = \int\limits_1^4 \frac{3x^2}{125} dx = \left.\frac{x^3}{125}\right|_1^4 = \frac{63}{125}$.

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{3x^2}{64} & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание равно…

1) 3;

2) 2;

3) 1;

4) 0.

Решение. Воспользуемся формулой $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Тогда $MX = \int\limits_0^4 x\frac{3x^2}{64} dx = \left.\frac{3}{64}\frac{x^4}{4}\right|_0^4 = 3$.

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{25} & \text{при } 0 < x \le 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Тогда ее дисперсия равна…

1) $\frac{25}{18}$;

2) $\frac{55}{6}$;

3) $\frac{25}{2}$;

4) $\frac{445}{18}$.

Решение. Дисперсию непрерывной случайной величины X можно вычислить по формуле $DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2$.

Тогда $DX = \int_0^5 x^2 \frac{2x}{25} dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{2} - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}$.

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, x > 2 \\ x - \frac{x^3}{4}, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Тогда ее медиана равна…

1) $\sqrt{4-\sqrt{8}}$;
2) 0;
3) 2;
4) 0,5.

Решение. Найдем функцию распределения по формуле $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)$.

Если $x \le 0$, то $F(x) = 0$.

Если $0 < x \le 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x (x - \frac{x^3}{4})dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4}\right)dx + \int_2^x 0dx = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Медиану определим как квантиль уровня 0,5, т.е. как корень уравнения $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} = \frac{1}{2}$, принадлежащий отрезку $[0;2]$, $x_{med} = \sqrt{4-\sqrt{8}}$.

3.2.10. Тестовые задания по теме «Непрерывные случайные величины» для самостоятельного решения

1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{25} & \text{при } 0 < x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P\{4 < X < 6\}$ равна…

1) $\frac{9}{25}$;

2) $\frac{4}{5}$;

3) $\frac{16}{25}$;

4) $\frac{4}{25}$.

2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при}\, x \le 0, \\ \frac{x}{7} & \text{при } 0 < x \le 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Тогда ее дисперсия равна …

1) $\frac{49}{12}$;

2) $\frac{7}{12}$;

3) $\frac{7}{2}$;

4) $\frac{12}{49}$.

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x-1}{2}, & 1 < x \le 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Тогда вероятность $P\{1{,}5 < X < 2{,}5\}$ равна…

1) 0,5;
2) 1;
3) 4;
4) 0,75.

4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, x > \pi \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание равно…

1) $\frac{\pi}{2}$;

2) 1;

3) 0;

4) 5.

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0, x>\pi \\ \frac{1}{2}\sin x, 0<x\le\pi \end{cases}$$

Тогда ее дисперсия равна…

1) $\frac{\pi^2}{4}-2$;

2) 1;

3) 2;

4) 0.

Ответы: **1** 1). **2** 1). 3**.** 1). 4**.** 1). 5**.** 1).

3.3. Основные законы распределения

Биномиальный закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет *биномиальный* закон распределения, если она принимает значения 0, 1, 2, …, n с вероятностями, которые вычисляются по формуле Бернулли:

$$P\{X=m\}=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=\overline{0,n}.$$

Величина, распределенная по биномиальному закону, есть число появлений некоторого события A в n последовательных независимых испытаниях, когда $P(A)=p$, $P(\overline{A})=1-p=q$.

Числовые характеристики: $MX=np, \quad DX=npq$.

Для величины X, распределенной по биномиальному закону, будем использовать запись $X\sim B(n,p)$.

Пример. В магазин поступила обувь с двух фабрик в отношении 2 : 3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. Вероятность того, что случайно выбранная пара обуви изготовлена первой фабрикой, равна $p=\frac{2}{2+3}=0{,}4$.

Случайная величина X − число пар обуви среди четырех, изготовленных первой фабрикой, имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n=4,\ p=0{,}4$, $X\sim B(4;0{,}4)$.

Спектром величины X являются значения 0, 1, 2, 3, 4, а вероятности вычислим по формуле Бернулли:

$$p_1 = P\{X = 0\} = P_4(0) = C_4^0 0{,}4^0 0{,}6^4 = 0{,}1296,$$
$$p_2 = P\{X = 1\} = P_4(1) = C_4^1 0{,}4^1 0{,}6^3 = 0{,}3456,$$
$$p_3 = P\{X = 2\} = P_4(2) = C_4^2 0{,}4^2 0{,}6^2 = 0{,}3456,$$
$$p_4 = P\{X = 3\} = P_4(3) = C_4^3 0{,}4^3 0{,}6^1 = 0{,}1536,$$
$$p_5 = P\{X = 4\} = P_4(4) = C_4^4 0{,}4^4 0{,}6^0 = 0{,}0256.$$

Проверим условие нормировки: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$.

Ряд распределения величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Найдем числовые характеристики:

$$MX = np = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6,\ DX = npq = 4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}96,\ \sigma X = \sqrt{DX} = \sqrt{0{,}96} = 0{,}98.$$

Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения *Пуассона*, если она принимает значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ с вероятностями

$$P\{X = m\} = P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального закона, когда число испытаний n велико, а вероятность реализации события A в одном испытании p мала, т.е. имеет место предельное соотношение

$$C_n^m p^m q^{n-m} \underset{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}}{\approx} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda \approx np.$$

Числовые характеристики: $MX = \lambda, \quad DX = \lambda$.

Для величины X, распределенной по закону Пуассона, будем использовать запись $X \sim \Pi(\lambda)$.

Пример. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено: 1) 3 изделия, 2) более 3 изделий, 3) хотя бы одно изделие.

Решение. Случайная величина X – число поврежденных изделий в пути, распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 500,\ p = 0{,}002$. Однако, так как n велико, а вероятность p мала, то биномиальное распределение можно приближенно заменить распределением Пуассона с параметром $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$, $X \sim \Pi(1)$.

1) $P\{X = 3\} = P(3) = \dfrac{1^3}{3!} e^{-1} = 0{,}061313$,

2) $P\{X>3\}=\sum_{m=4}^{500}P(m)=1-\sum_{m=0}^{3}P(m)=1-0{,}367879-0{,}367879-0{,}18394-$
$0{,}061313=0{,}018989$,

3) $P\{X\geq 1\}=\sum_{m=1}^{500}P(m)=1-P(0)=1-0{,}367879=0{,}632121$.

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет *геометрическое* распределение, если она принимает значения $1,2,\ldots,m,\ldots$ с вероятностями, которые вычисляются по формуле $P\{X=m\}=pq^{m-1}, \quad m=1,2,\ldots$

Величина, распределенная по геометрическому закону, есть число испытаний, проведенных по схеме Бернулли, до первого появления некоторого события A в последовательных независимых испытаниях, когда $P(A)=p$, $P(\overline{A})=1-p=q$.

Числовые характеристики: $MX=\dfrac{1}{p}, \quad DX=\dfrac{q}{p^2}$.

Для величины X, распределенной по геометрическому закону, будем использовать запись $X\sim G(p)$.

Пример. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной. Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Решение. Случайная величина X − число проверенных деталей до обнаружения бракованной, имеет геометрический закон распределения с параметром $p=0{,}1$, $X\sim G(0{,}1)$.

Спектром величины X являются значения 1, 2, 3, 4, …, а вероятности вычислим по формуле $P\{X=m\}=0{,}1\cdot 0{,}9^{m-1}, \quad m=1,2,\ldots$. Ряд распределения величины X имеет вид

x_i	1	2	3	4	…	m	…
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	….	$0{,}1\cdot 0{,}9^{m-1}$	…

Найдем числовые характеристики:

$$MX=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}1}=10, \quad DX=\frac{q}{p^2}=\frac{0{,}9}{0{,}01}=90.$$

Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет *гипергеометрическое* распределение, если она принимает значения $0,1,2,\ldots,\min(n,M)$ с вероятностями, которые вычисляются по формуле

$$P\{X=m\}=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m=0,1,2,\ldots,\min(n;M).$$

Величина, распределенная по гипергеометрическому закону, есть число объектов, обладающих заданным свойством, среди n объектов, случайно извлеченных из совокупности N объектов, M из которых обладают этим свойством.

Числовые характеристики:

$$MX=n\frac{M}{N}, \quad DX=n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

Пример. В лотерее «Спортлото 6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 45 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта). Найти закон распределения случайной величины X – числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных 6. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Решение. Случайная величина X – число угаданных видов спорта в лотерее «6 из 45», имеет гипергеометрический закон распределения с параметрами $n=6$, $M=6$, $N=45$. Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,40056	0,42413	0,15147	0,02244	0,00137	0,00003	0,0000001

Вероятность получения денежного приза $P\{3 \le X \le 6\}=$ 0,02244 + 0,00137 + + 0,00003 + 0,0000001 = 0,02384.

Найдем числовые характеристики:

$$MX=6\frac{6}{45}=0{,}8; \quad DX=6\frac{39}{44}\left(1-\frac{39}{45}\right)\left(1-\frac{6}{45}\right)=0{,}6145.$$

Таким образом, среднее число угаданных видов спорта из 6 всего 0,8, а вероятность выигрыша только 0,024.

Равномерный закон распределения

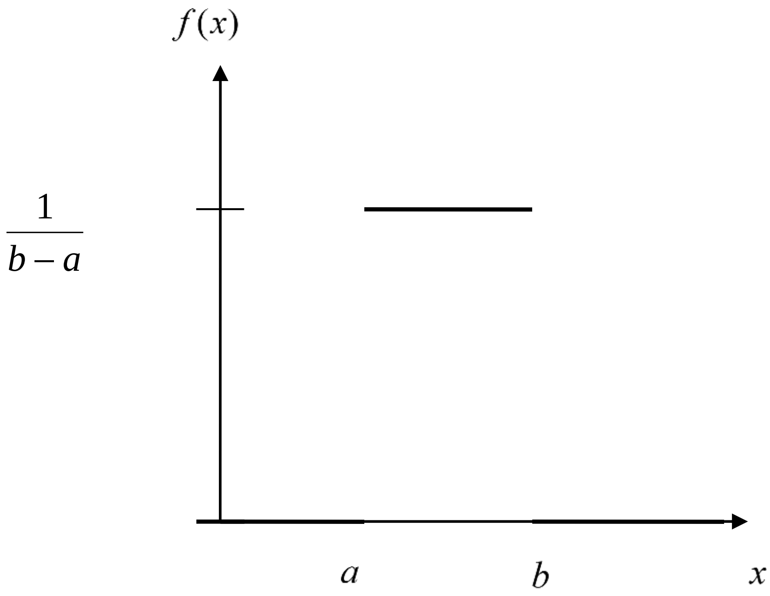
Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный* закон распределения на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке и равна 0 за его пределами:

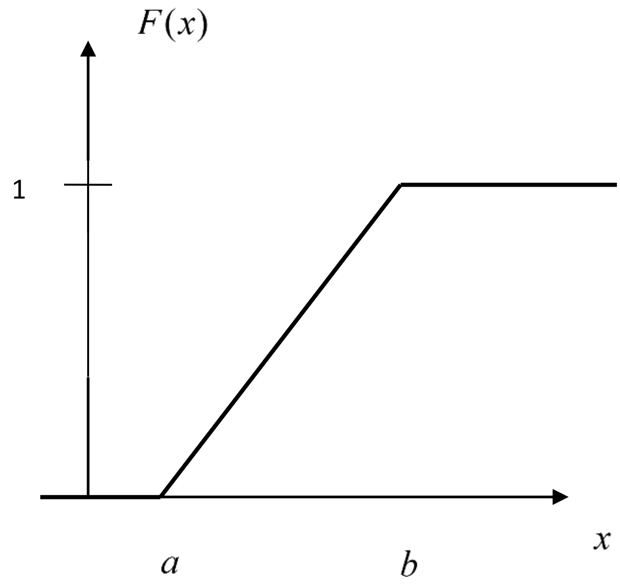
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}.$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:





Числовые характеристики:

$$MX=\frac{a+b}{2},\quad DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Для величины X, распределенной по равномерному закону, будем использовать запись $X\sim U(a;b)$.

Пример. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 минуты. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не более 30 секунд. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $X-$ времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина $X-$ время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке $[0;2]$, имеет равномерный закон распределения $X\sim U(a;b)$, поэтому $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$. Найдем вероятность того, что пассажиру придется ждать не более 30 секунд: $P\{0\le X\le 0{,}5\}=\int\limits_0^{0{,}5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0{,}5}=\frac{1}{4}$. Найдем числовые характеристики: $MX=\frac{0+2}{2}=1$ мин., $DX=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{1}{3}$, $\sigma X=\sqrt{DX}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}58$ мин.

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

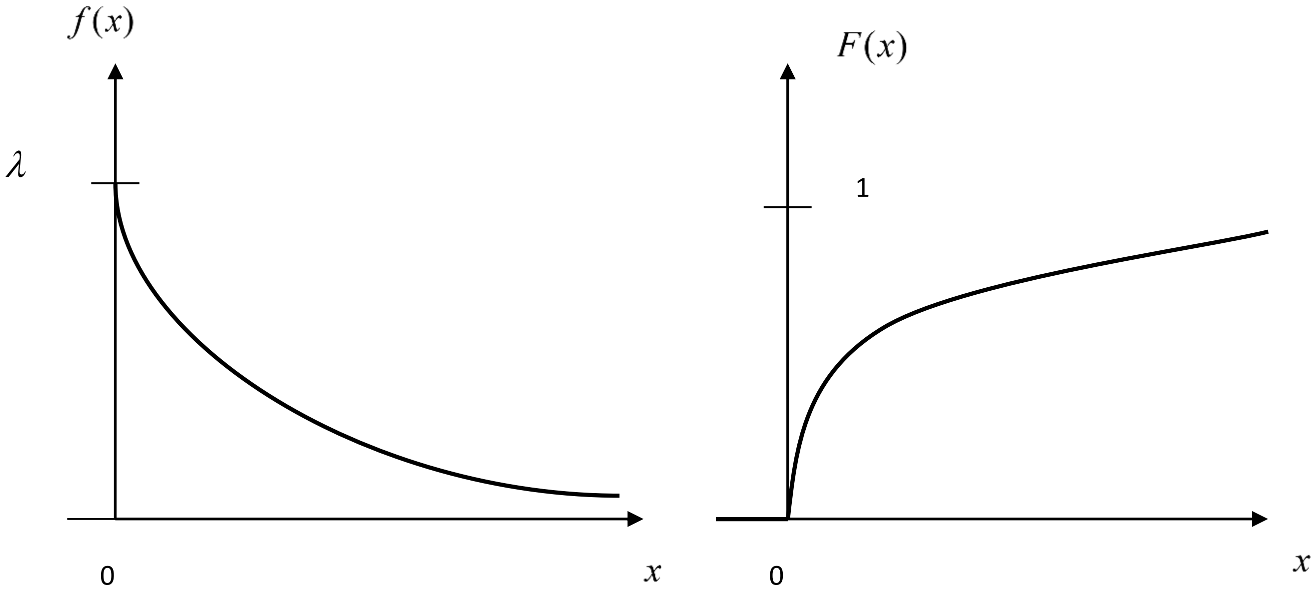
Непрерывная случайная величина X имеет *показательный (экспоненциальный)* закон распределения с параметром λ, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



Числовые характеристики: $MX=\dfrac{1}{\lambda}$, $\quad DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Для величины X, распределенной по экспоненциальному закону, будем использовать запись $X\sim E(\lambda)$.

Пример. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По условию $MX=\dfrac{1}{\lambda}=15$, поэтому параметр $\lambda=\dfrac{1}{15}$, плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, x\ge 0,\\ 0, \quad x<0\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0, \quad x<0\\ 1-e^{-\frac{1}{15}x}, x\ge 0\end{cases}.$$

Найдем вероятность:

$$P\{20\le X<+\infty\}=F(+\infty)-F(20)=1-\left(1-e^{-\frac{20}{15}}\right)=e^{-\frac{20}{15}}\approx 0{,}264.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma X = MX = 15$ дней.

Нормальный закон распределения

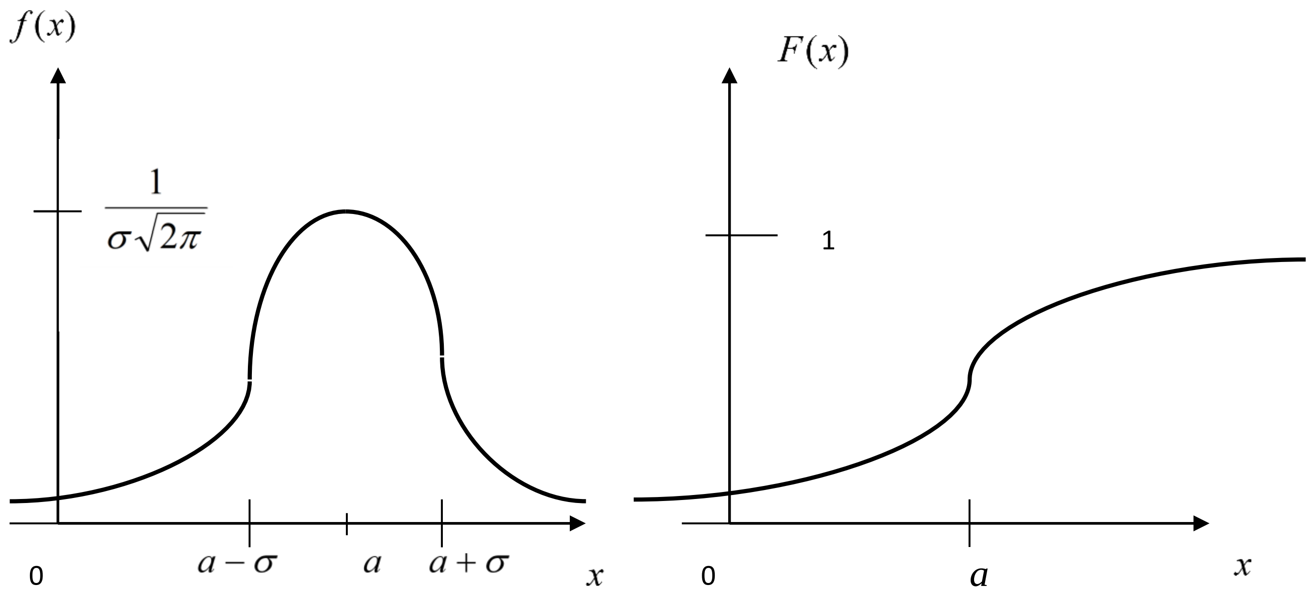
Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный* закон распределения (закон Гаусса) с параметрами a и σ^2, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$:



Числовые характеристики: $MX = a, \quad DX = \sigma^2$.

Для величины X, распределенной по нормальному закону, будем использовать запись $X \sim N(a,\sigma^2)$.

Вероятность попадания случайной величины $X \sim N(a,\sigma^2)$ в промежуток от α до β определяется по формуле

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функция Лапласа, которая является нечетной $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и затабулированной (ее значения содержатся в специальных таблицах).

Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания не превысит величину $\Delta > 0$ (по абсолютной величине), равна $P\{|X - a| \le \Delta\} = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$.

«Правило трех сигм»: если $X \sim N(a,\sigma^2)$, то практически достоверно (с вероятностью, близкой к 1), что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Пример. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина $X \sim N(a,\sigma^2)$ с параметрами $a = 173,\ \sigma^2 = 36$, найти:

1) функцию плотности вероятности и функцию распределения величины X;

2) доли костюмов 4-го (176–182) и 3-го (170–176) роста, которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы;

3) квантиль уровня 0,7;

4) сформулировать «правило трех сигм».

Решение.

1) В общие формулы для $f(x)$ и $F(x)$ подставим $a = 173,\ \sigma^2 = 36$, получим: $f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}$, $F(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-173)^2}{72}}dt$.

2) Для определения доли костюмов найдем вероятности:

$$P\{176 \le X \le 182\} = \Phi\left(\frac{182-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{176-173}{6}\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) =$$

$0{,}4332 - 0{,}1915 = 0{,}2417 \Rightarrow$ доля костюмов 4-го роста должна составлять 24,17 % в общем объеме производства;

$$P\{170 \le X \le 176\} = P\{|X - 173| \le 3\} = 2\Phi\left(\frac{3}{6}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383 \Rightarrow$$

доля костюмов 3-го роста должна составлять 38,3 % в общем объеме производства.

3) Квантиль уровня 0,7 найдем из уравнения $P\{0 \le X \le x_{0,7}\} = 0{,}7$,

$$P\{0 \le X \le x_{0,7}\} = \Phi\left(\frac{x_{0,7} - 173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 173}{6}\right) = \Phi\left(\frac{x_{0,7} - 173}{6}\right) - \Phi(-28) =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_{0,7} - 173}{6}\right) + 0{,}5 = 0{,}7 \Rightarrow \Phi\left(\frac{x_{0,7} - 173}{6}\right) = 0{,}2 \Rightarrow \frac{x_{0,7} - 173}{6} = 0{,}53 \Rightarrow$$

$x_{0,7} = 0{,}56 \cdot 6 + 173 = 176{,}36$ см. Это значит, что 70 % мужчин данной возрастной группы имеют рост меньше 176,36 см.

4) Практически достоверным является факт, что рост мужчин данной возрастной группы находится в пределах

$(a - 3\sigma, a + 3\sigma) = (173 - 3 \cdot 6; 173 + 3 \cdot 6) = (155; 191)$, т.е. $155 \le X \le 191$ см.

3.3.1. Примеры решения задач по теме «Основные законы распределения»

1. Банк выдал пять кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,1. Найти вероятность того, что в срок не будут погашены три кредита.

Решение. Случайная величина X – число непогашенных кредитов. Определим вероятность значения по формуле Бернулли, когда $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 5$, $m = 3$: $P\{X = 3\} = C_5^3 (0{,}1)^3 (0{,}9)^2 = 0{,}0081$.

2. Телефонная станция обслуживает 5 000 абонентов. Вероятность позвонить на коммутатор любому абоненту в течение часа равна 0,001. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят: 1) три абонента, 2) не более трех абонентов?

Решение. Случайная величина X – число позвонивших абонентов, $X \sim \Pi(\lambda)$. Определим вероятности значений по формуле Пуассона, когда $p = 0{,}001$, $n = 5000$, $\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$, 1) $m = 3$: $P\{X = 3\} = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = 0{,}140374$, 2) $m \le 3$:

$P\{X \le 3\} = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}006738 + 0{,}03369 + 0{,}084224 +$
$+ 0{,}140374 = 0{,}265026$.

3. Производятся многократные испытания некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Найти математическое ожидание и дисперсию числа опытов, которые надо провести. Вероятность отказа элемента в одном опыте равна 0,1.

Решение. Случайная величина X – число опытов, которые надо провести, $X \sim G(p)$, $p = 0{,}1$. Найдем числовые характеристики:

$$MX = \frac{1}{p} = 10, \ \ DX = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{0{,}9}{0{,}01} = 90.$$

4. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекают 3 шара. Описать закон распределения числа белых шаров в выборке, найти математическое ожидание, дисперсию, моду.

Решение. Случайная величина X − число белых шаров в выборке – имеет гипергеометрический закон распределения с параметрами $n=3$, $M=4$, $N=10$. Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

Найдем числовые характеристики:

$$MX=3\frac{4}{10}=\frac{6}{5},\quad DX=3\frac{4}{9}\left(1-\frac{4}{10}\right)\left(1-\frac{3}{10}\right)=\frac{14}{25}.$$

5. Цена шкалы деления измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого числа. Полагая, что ошибка округления распределена по равномерному закону, найти: 1) математическое ожидание и дисперсию этой величины, 2) вероятность того, что ошибка округления меньше 0,04; больше 0,05.

Решение. Случайная величина X − ошибка округления – имеет равномерный закон распределения $X \sim U(0;0,2)$, поэтому

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0,2}=5, & x\in[0;0,2]\\ 0, & x\notin[0;0,2]\end{cases}.$$

Найдем числовые характеристики:

$$MX=\frac{0+0,2}{2}=0,1,\ DX=\frac{(0,2-0)^2}{12}=0,00333.$$

Найдем вероятность того, что ошибка округления меньше 0,04:

$$P\{0<X<0,04\}+P\{0,16<X<0,2\}=\int\limits_0^{0,04}5dx+\int\limits_{0,16}^{0,2}5dx=5x\Big|_0^{0,04}+5x\Big|_{0,16}^{0,2}=0,4,$$

вероятность того, что ошибка округления больше 0,05:

$$P\{0,05<X<0,15\}=\int\limits_{0,05}^{0,15}5dx=5x\Big|_{0,05}^{0,15}=0,5.$$

6. Время расформирования состава через горку – случайная величина, распределенная по показательному закону. Пусть $\lambda=5-$ среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 час. Определить вероятность того, что время расформирования состава: 1) меньше 30 мин, 2) больше 6 мин, но меньше 24 мин.

Решение. Пусть случайная величина X − время расформирования состава, $X \sim E(\lambda)$, параметр $\lambda = 5$, плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, x \ge 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ 1 - e^{-5x}, x \ge 0 \end{cases}.$$

Найдем вероятности:

1) $P\{0 < X < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(0) = 1 - e^{-5\cdot 0{,}5} \approx 0{,}918$,

2) $P\{0{,}1 < X < 0{,}4\} = F(0{,}4) - F(0{,}1) = (1 - e^{-5\cdot 0{,}4}) - (1 - e^{-5\cdot 0{,}1}) \approx 0{,}4712$.

7. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5 % коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых: 1) менее 470 г, 2) от 500 до 550 г, 3) более 550 г, 4) отличается от средней не более чем на 30 г (по абсолютной величине)?

Решение. Пусть случайная величина X −масса коробки с конфетами, $X \sim N(540, \sigma)$. Для определения σ решим уравнение $P\{500 < X < +\infty\} = 0{,}95$, откуда получим, что $\sigma = 24{,}24$ г. Определим вероятности событий:

$$1) P\{0 < X < 470\} = \Phi\left(\frac{470 - 540}{24{,}24}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 540}{24{,}24}\right) = \Phi(-2{,}89) + 0{,}5 = -0{,}498 + 0{,}5 =$$
$$= 0{,}002,$$

$$2) P\{500 < X < 550\} = \Phi\left(\frac{550 - 540}{24{,}24}\right) - \Phi\left(\frac{500 - 540}{24{,}24}\right) = \Phi(0{,}41) + \Phi(1{,}65) = 0{,}1519 +$$
$$+ 0{,}4505 = 0{,}6024,$$

$$3) P\{550 < X < +\infty\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{550 - 540}{24{,}24}\right) = 0{,}50 - \Phi(0{,}41) = 0{,}3418,$$

$$4) P\{|X - a| \le 30\} = 2\Phi\left(\frac{30}{24{,}24}\right) = 0{,}781.$$

3.3.2. Задачи по теме «Основные законы распределения» для самостоятельного решения

1. Устройство состоит из 1 000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Найти: 1) закон распределения отказавших за время t элементов, 2) математическое ожидание и дисперсию этой величины, 3) вероятность того, что за время откажет хотя бы один элемент.

2. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Найти: 1) закон распределения числа сделанных выстрелов, 2) математическое ожидание и дисперсию этой величины; 3) вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов.

3. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. Найти: 1) закон распределения числа телевизоров с дефектами среди 5 наудачу выбранных, 2) математическое ожидание и дисперсию этой величины, 3) вероятность того, что среди выбранных нет телевизоров с дефектами.

4. Среднее время безотказной работы прибора равно 80 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: 1) функцию плотности вероятности и функцию распределения, 2) вероятность того, что в течение 100 ч прибор не выйдет из строя.

5. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти: 1) вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед.; не ниже 15,4 ден. ед.; от 14,9 до 15,3 ден. ед. 2) границы, в которых будет находиться текущая цена акции (с помощью «правила трех сигм»).

6. Цена некоторой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20 % рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75 % – выше 90 ден. ед. Найти: 1) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение цены ценной бумаги; 2) вероятность того, что день покупки цена будет заключена в пределах от 83 до 96 ден. ед.; 3) с надежностью 0,95 определить максимальное отклонение цены ценной бумаги от среднего (прогнозного) значения (по абсолютной величине).

Ответы: **1.** 1) $X \sim \Pi(2)$, 2) $MX = DX = 2$, 3) 0,865. **2.** 1) $X \sim G(0{,}05)$, 2) $MX = 20, DX = 380$, 3) 0,8145. **3.** 1) $P\{X = m\} = \dfrac{C_7^m C_{13}^{5-m}}{C_{20}^5}$, 2) $MX = 1{,}75, DX = 0{,}898$, 3) 0,083. **4.** 1) $f(x) = \begin{cases} 0{,}0125e^{-0{,}0125x}, x \geq 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}0125x}, x \geq 0 \end{cases}$, 2) 0,286. **5.** 1) 0,4332; 0,0228; 0,6246; 2) (14,4;15,6)
6. 1) $MX \approx 98, \sigma X \approx 12$; 2) 0,331; 3) $\Delta = 23{,}52$.

3.3.3. Решение тестовых заданий по теме «Основные законы распределения»

1. Проводится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна 0,6. Тогда математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины *X* – числа появлений события *A* в 100 проведенных испытаниях равны…

1) $MX = 60, DX = 24;$

2) $MX = 24, DX = 60;$

3) $MX = 6, DX = 24;$

4) $MX = 24, DX = 6.$

Решение. Случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей. Поэтому $MX = np = 100 \cdot 0{,}6 = 60,$ $DX = npq = 100 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 24.$

2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{32}}.$$

Тогда математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины равны…

1) $a = -3, \sigma = 4;$

2) $a = 3, \sigma = 4;$

3) $a = -3, \sigma = 16;$

4) $a = 3, \sigma = 16.$

Решение. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $MX = a, \quad DX = \sigma^2$. Поэтому $MX = a = -3, \quad \sigma X = 4$.

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}.$$

Тогда вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (4;7), можно вычислить как…

1) $P(4 < X < 7) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5);$

2) $P(4 < X < 7) = \Phi(1) - \Phi(0{,}5);$

3) $P(4 < X < 7) = \Phi(0{,}5) - \Phi(1);$

4) $P(4 < X < 7) = \Phi(2) + \Phi(1).$

Решение. Если плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

то вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(\alpha;\beta)$, определяется формулой

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx -$ функция Лапласа.

Тогда

$$P\{4 < X < 7\} = \Phi\left(\frac{7-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{2}\right) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5),$$

так как $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{x}{7} & \text{при } 0 < x \le 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Найти ее дисперсию.

1) 49/12;

2) 0;

3) 7;

4) 3.

Решение. Эта случайная величина распределена равномерно в интервале (0,7). Тогда ее дисперсию можно вычислить по формуле $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$. То есть $DX = \frac{(7-0)^2}{12} = \frac{49}{12}$.

5. Квантиль уровня 0,19 экспоненциального закона распределения с параметром 2 равен…

1) $\ln\frac{10}{9}$;

2) $\ln 0{,}9$;

3) $\frac{1}{2}\ln 1{,}19$;

4) 0.

Решение. Квантилью уровня p непрерывной случайной величины X называется такое ее значение x_p, для которого $F(x_p) = p$. Для случайной величины $X \sim E(2)$ функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Так как $F(x_{0,19})=0{,}19$, то $1-e^{-2\cdot x_{0,19}}=0{,}19$. Решая это уравнение, получим: $x_{0,19}=\ln\frac{10}{9}$.

3.3.4. Тестовые задания по теме «Основные законы распределения» для самостоятельного решения

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{32}}.$$

Тогда вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (7;9), можно вычислить как…

1) $P(7<X<9)=\Phi(0{,}75)-\Phi(0{,}25)$;

2) $P(7<X<9)=\Phi(0{,}75)+\Phi(0{,}25)$;

3) $P(7<X<9)=\Phi(0{,}25)-\Phi(0{,}75)$;

4) $P(7<X<9)=\Phi(2{,}25)+\Phi(1{,}75)$.

2. Случайная величина $X\sim U(-1;8)$. Тогда точка, в которой функция распределения равна $\frac{1}{3}$, равна…

1) 4;
2) 2;
3) $\frac{4}{3}$;
4) 0.

3. На предприятии работает 500 специалистов. Вероятность невыхода на работу специалиста равна 0,001. Тогда вероятность невыхода на работу трех специалистов равна…

1) 0,012636;
2) 0,393509;
3) 0,606503;
4) 0,149301.

4. Случайная величина $X\sim G(0{,}2)$. Тогда ее дисперсия равна…

1) 0,3125;
2) 20;
3) 1;
4) 0,5.

5. Случайная величина $X\sim B(3;0{,}2)$. Тогда $P\{X>0\}$ равна…

1) 0;
2) 0,992;
3) 0,488;
4) 0,512.
Ответы: **1.** 1). **2.** 2). **3.** 1). **4.** 2). **5.** 3).

Список рекомендуемой литературы

Аксенюшкина Е.В. Математические и инструментальные средства анализа экономики / Е.В. Аксенюшкина, П.Г. Сорокина. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2018. – 104 с.

Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов : учеб. пособие / А.М. Ахтямов. – 3-е изд., испр. – Москва : ФИЗМАЛИТ, 2016. – 464 с.

Ежова Л.Н. Эконометрика. Начальный курс с основами теории вероятностей и математической статистики / Л.Н. Ежова. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2002. – 310 с.

Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – Москва : Юрайт : ИД «Юрайт», 2010.

Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения : учеб. пособие для бакалавров / В.Л. Клюшин. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2013. – 165 с. – (Бакалавр. Базовый курс).

Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов : учеб. пособие / В.Л. Клюшин. – Москва : Инфра-М, 2015. – 447 с. – (Учебники РУДН).

Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 543 с.

Леонова О.В. Сборник задач и тестовых заданий по теории вероятностей: Учебное пособие для студентов бакалавриата / О.В. Леонова. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2013. – 80 с.

Леонова О.В. Математика (линейная алгебра) / О.В. Леонова, П.Г. Сорокина. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2019. – 113 с.

Математическая статистика. Сборник задач, упражнений и тестовых заданий : учеб. пособие / Л.Н. Ежова, О.В. Леонова, Н.В. Мамонова, С.И. Никулина. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009.

Просветов Г.И. Теория вероятностей и математическая статистика: задачи и решения : учеб.-практ. пособие / Г.И. Просветов. – Москва : Альфа-Пресс, 2009. – 272 с.

Теория вероятностей : практикум / Л.Н. Ежова, Р.З. Абдуллин, О.В. Леонова, Н.В. Мамонова, С.И. Никулина. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2004. – 99 с.

Шипачев В.С. Высшая математика : учеб. и практикум / В.С. Шипачев. – 8-е изд., пер. и доп. – Москва : Юрайт, 2014.

Kenneth K. Linear Algebra, Theory and Applications / Kuttler Kenneth. – Textbook Equity LLC Publication, 2013. – 500 p.

Sheldon A. Linear Algebra. Done Right / Axler Sheldon. – 3rd ed. –New York : Springer, 2015. – 261 p.